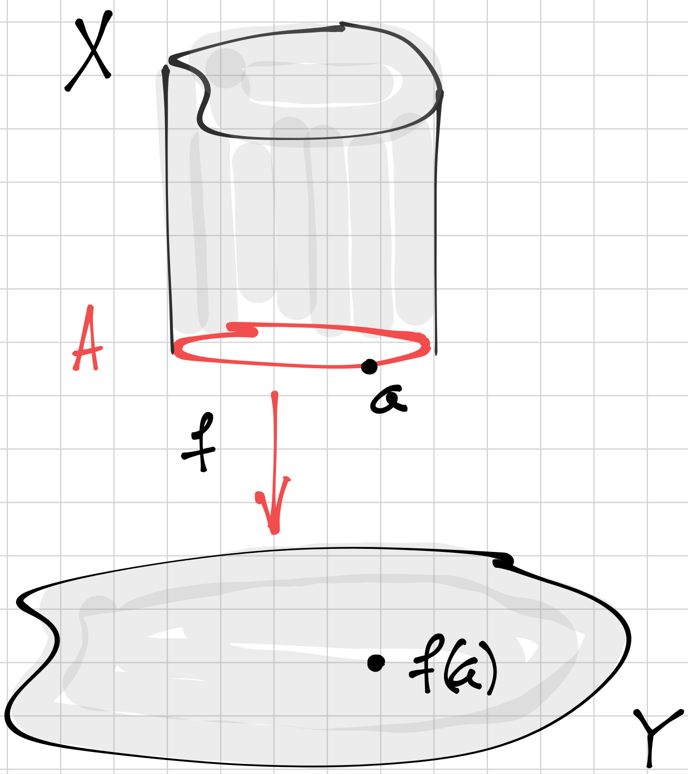
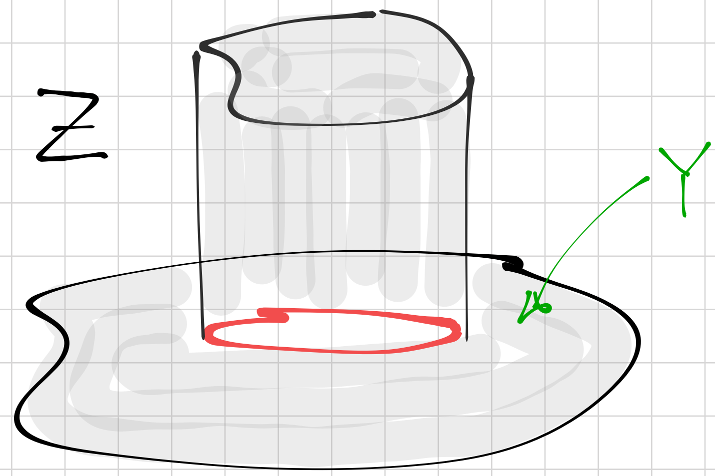
19. Espacios de Adjunción y Complejos Celulares



$$Z = Y \cup_f X := Y \amalg X \,/\, f(a) \sim a \quad \forall a \in A$$



Espacio de Adjunción

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{f}"] & Z \\
A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, phantom, "/\!/"] & Y \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

$i : Y \longrightarrow Z$ homeo. sobre su imagen

$y \longmapsto [y]$

$\tilde{f} : X \longrightarrow Z$ continua

$x \longmapsto [x]$

$\tilde{f}|_A = f$

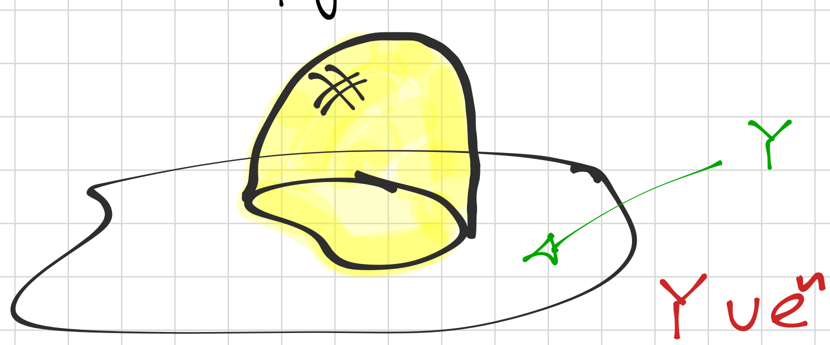
Pegar una n-celda:

$X = D^n$

$A = S^{n-1}$

$f : S^{n-1} \longrightarrow Y$ mapeo

$Z = Y \cup_f D^n$ se obtiene de Y pegando una n-celda

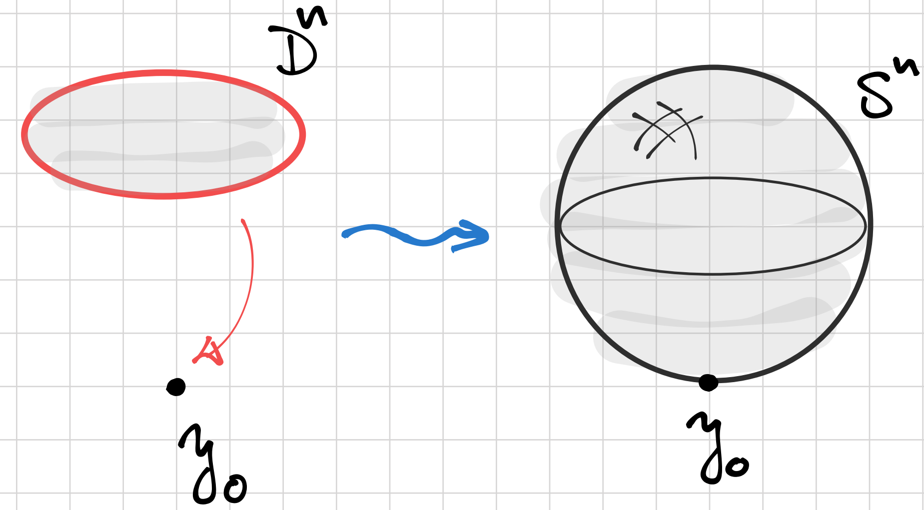


Ejem: $Y = \{y_0\}$ un pto.

$f : S^{n-1} \longrightarrow \{y_0\}$

mapeo constante

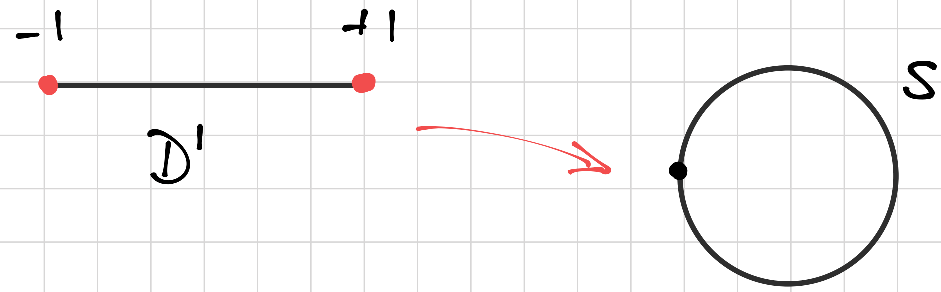
$\Rightarrow \{y_0\} \cup D^n = S^n$

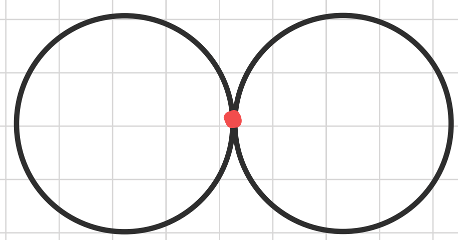


Ejem:

$$\begin{array}{ccc} D^1 & & \\ \uparrow & & \\ S^0 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

mapeo cte.



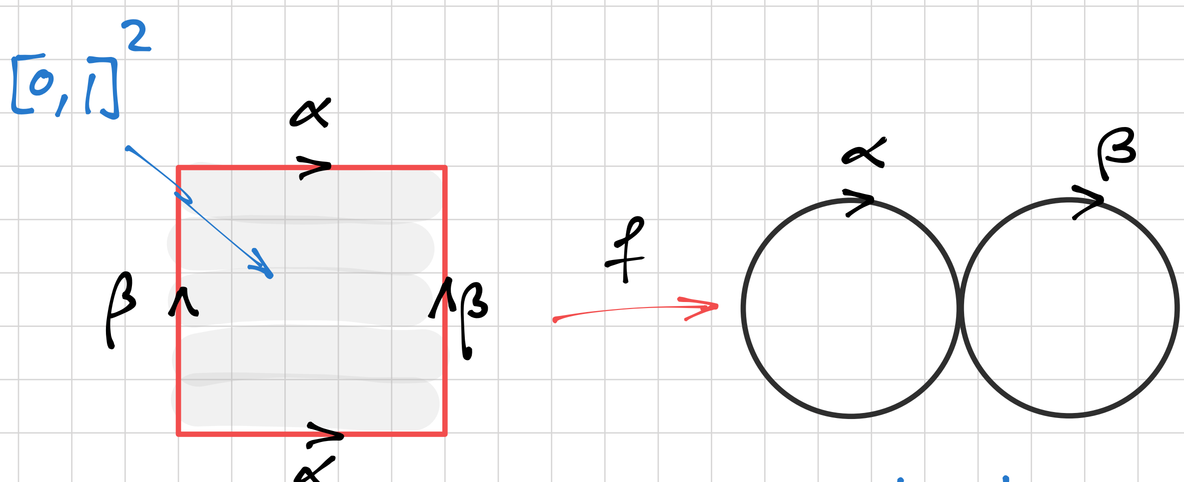


$S^1 \vee S^1 = G_2$

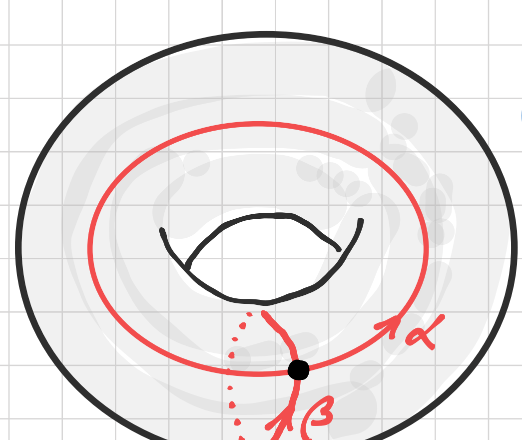
"wedge" de dos círculos.

Ejem:

$$\begin{array}{ccc} [0,1]^2 & & \\ \uparrow & & \\ \partial[0,1]^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \vee S^1 \end{array}$$



$S^1 \vee S^1$

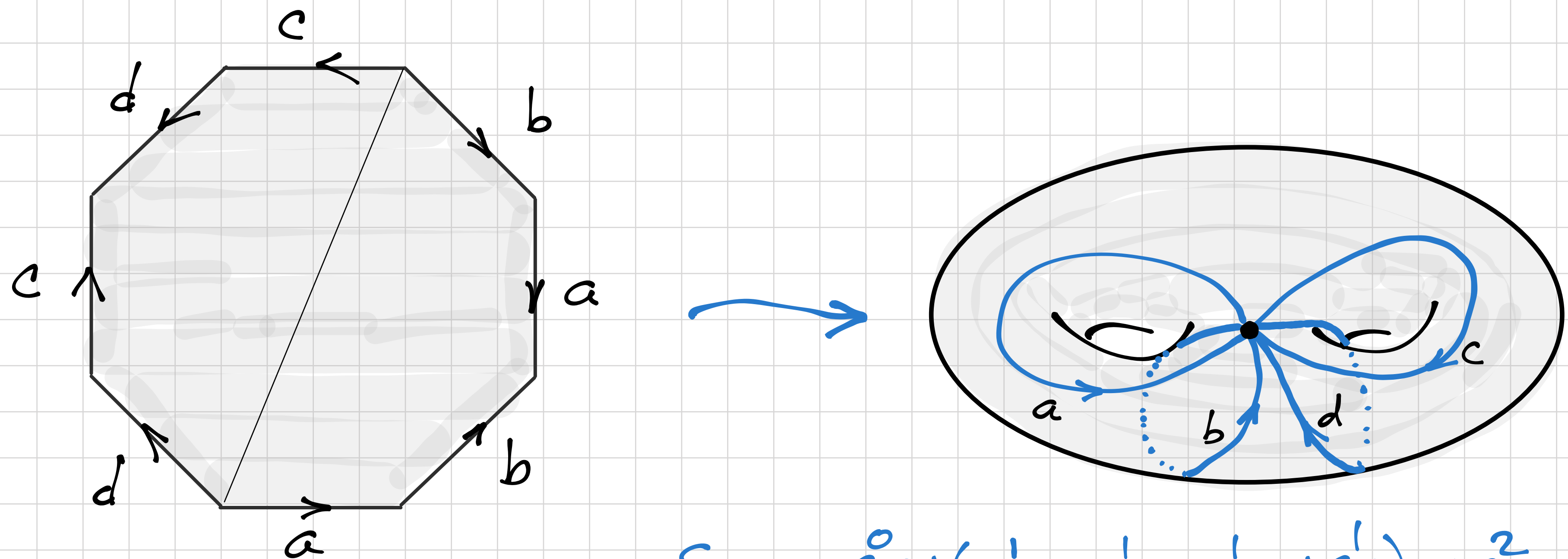


$(S^1 \vee S^1) \cup e^2$

$T = e^0 \cup (e^1_\alpha \cup e^1_\beta) \cup e^2$

Toro de dim. 2

Ejem: Sup. compacta, orientable, género 2.



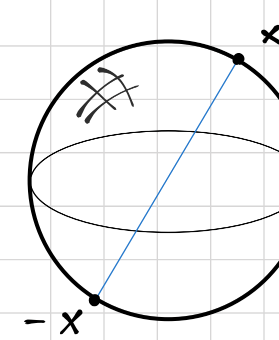
$$S_2 = e^0 \cup (e^1_a \cup e^1_b \cup e^1_c \cup e^1_d) \cup e^2$$

Ejem: Sup. compacta, orientable, género g.

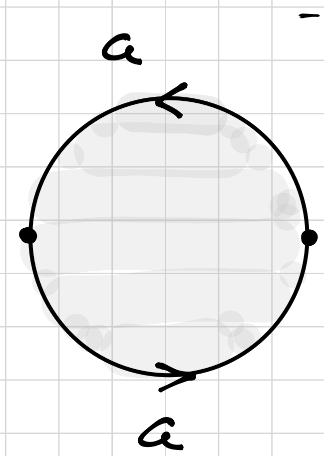
$$S_g = \mathop{\#}_{i=1}^{g} T = e^0 \cup \bigcup_{i=1}^{g} (e^1_{\alpha_i} \cup e^1_{\beta_i}) \cup e^2 .$$

Ejem: El plano proyectivo (real).

$$\mathbb{RP}^2 = S^2 \Big/ \begin{array}{l} x \sim \pm x \\ \forall x \in S^2 \end{array}$$



$$= D^2 \Big/ \begin{array}{l} x \sim \pm x \\ \forall x \in \partial D^2 \end{array}$$



$e^0 \cup e^1 \cup e^2.$

Ejem: Sup. compacta, no orientable, género h.

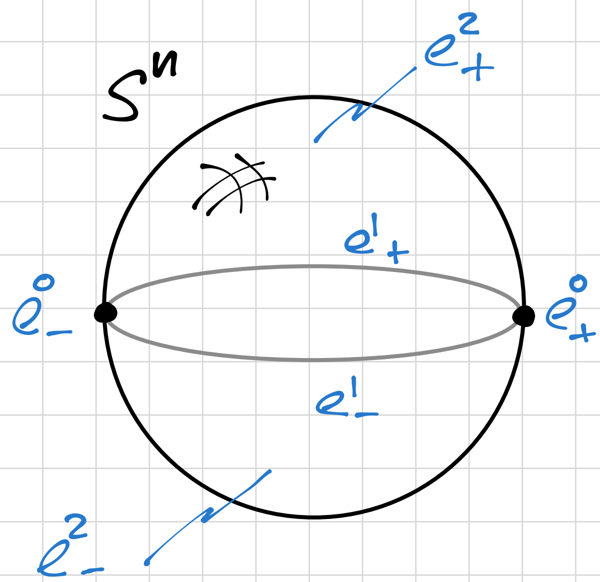
$$N_h = \mathop{\#}_{i=1}^{h} \mathbb{RP}^2 = e^0 \cup (e^1_{a_1} \cup \dots \cup e^1_{a_h}) \cup e^2 .$$

Ejem: Espacio proyectivo (real) de dim n.

$$\mathbb{R}P^n = \text{conjunto de líneas en } \mathbb{R}^{n+1}, \text{ pasan por } 0.$$
$$= (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \Big/ \begin{array}{l} x \sim \lambda x \\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{proy.}"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \arrow[d, "\text{proyección canónica}"] \\ S^n / x \sim \pm x \arrow[r, dashed, "\approx"] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{R}P^n = S^n / x \sim \pm x$$



$$S^0 = e^0_+ \cup e^0_-$$
$$S^1 = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-)$$
$$S^2 = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-) \cup (e^2_+ \cup e^2_-)$$

En general: $S^n = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-) \cup \dots \cup (e^n_+ \cup e^n_-)$

dos celdas antipodales en cada dimensión $i = 0, \dots, n$

$\therefore$ $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$ una celda en c/dim.

$$\mathbb{R}P^{n+1} = \mathbb{R}P^n \cup_{p_n} e^{n+1} \quad \text{donde } p_n : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n \text{ proy. canónica}$$

Ejem: Espacio proyectivo complejo, dim. n.

$\mathbb{C}P^n$ = conjunto de subespacios dim. 1 en $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0\right) \Big/ \begin{array}{c} \vec{z} \sim \lambda \vec{z} \\ \lambda \in \mathbb{C}^* \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 & & (z_0, z_1, \dots, z_n) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^n & & [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \end{array}$$

coordenadas homogéneas

No todas cero

$$S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ gpo. topológico c/mult.

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{proy.}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \arrow[d, "\text{proy.}"] \\ S^{2n+1}/S^1 \arrow[r, "\approx"] & \mathbb{C}P^n \end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$ cociente por acción de S^1

$\therefore$ $\mathbb{C}P^n$ compacto

Caso $n=1$: $\mathbb{C}P^1 = S^2$

$$(z_0, z_1) \longmapsto z_0/z_1$$

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\text{proy.}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \mathbb{C}P^1 = S^3/S^1 \arrow[ur, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

- $\mathbb{C}P^n$ es una variedad de dim. $2n$.

$$\mathbb{C}P^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$$

$$U_i = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_i \neq 0\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

$$[z_0 : \dots : z_n] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \cancel{\frac{z_i}{z_i}}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

- $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

$$(z_0, \dots, z_{n-1}) \longmapsto (z_0, \dots, z_{n-1}, 0)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \setminus 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \arrow[d] \\
\mathbb{C}P^{n-1} \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}P^n
\end{tikzcd}$$

$$[z_0 : \dots : z_{n-1}] \longmapsto [z_0 : \dots : z_{n-1} : 0]$$

- $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1} = U_n = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} \approx (D^{2n})^\circ$

Teorema: $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \cup e^{2n}$

$$= \mathbb{C}P^{n-1} \cup_{f_n} D^{2n}$$

Mapeo de pegado: $f_n : \partial D^{2n} = S^{2n-1} \xrightarrow[\text{canónica}]{\text{proy.}} S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{C}P^{n-1}$

$\therefore$

$$\mathbb{C}P^0 = e^0 = *$$

$$\mathbb{C}P^1 = e^0 \cup e^2 = S^2$$

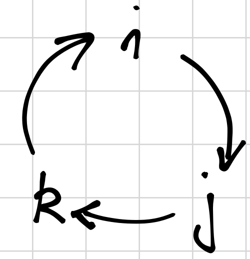
$$\mathbb{C}P^2 = e^0 \cup e^2 \cup e^4$$

En general: $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$.

Ejem: Espacio proyectivo cuaterniónico, dim. n

Anillo de los Cuaternios: $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, base canónica $1, i, j, k$

Multiplicación: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$



$$q = a + xi + yj + zk$$
$$\bar{q} = a - xi - yj - zk$$
$$|q_1 \cdot q_2| = |q_1|\,|q_2|, \qquad q \cdot \bar{q} = |q|^2$$

$$S^3 = \{ q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1 \}$$ grpo. topológico

$$S^{4n+3} = \{ (q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid |q_0|^2 + \dots + |q_n|^2 = 1 \}$$

$S^3 \curvearrowright S^{4n+1}$ mult. coordenada a coordenada

Espacio proyectivo: $\mathbb{H}P^n = S^{4n+1} / S^3$

$n=0 \quad \mathbb{H}P^0 = *$

$n=1 \quad \mathbb{H}P^1 = S^7 / S^3 \approx S^4$

Proyección canónica: $p_n : S^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$

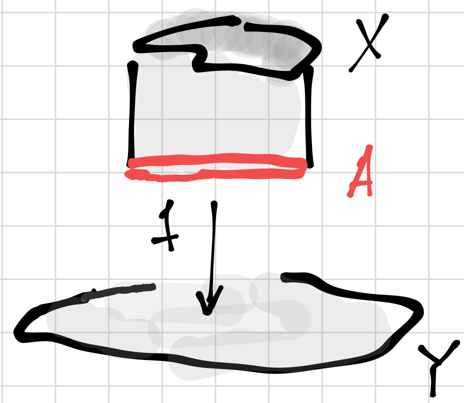
$$\mathbb{H}P^{n+1} \approx \mathbb{H}P^n \underset{p_n}{\cup} e^{4n+4}$$

$\therefore \quad \mathbb{H}P^n = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \dots \cup e^{4n}.$

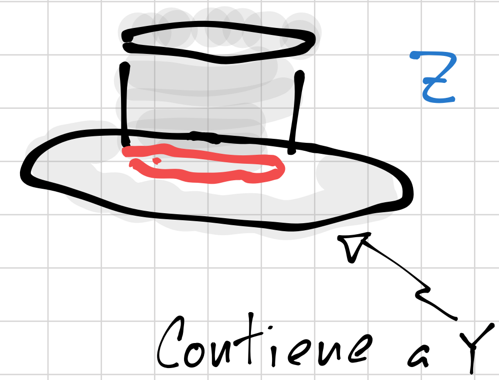
Def: Un complejo celular Z se obtiene de un conjunto finito de ptos. Z_0 pegando un núm. finito de celdas:

$$Z = Z_0 \cup e^{n_1} \cup e^{n_2} \cup \dots \cup e^{n_k}$$

Caso general:



$Y \cup_f X = Z$



Supondremos:

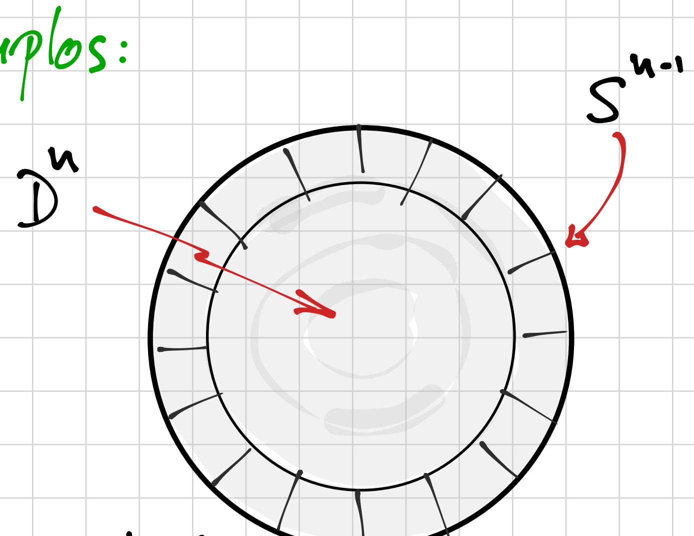
1. X es Hausdorff.
2. A es cerrado en X.
3. Ptos. de $X \setminus A$ se pueden separar de A

   $\forall x \in X \setminus A$ $\exists$ abiertos disjuntos $x \in U$ & $A \subseteq V$.
4. A tiene un collar en X

   $\exists$ vecindad $A \subsetneq B$ t.q. A es retracto fuerte por def. de B.

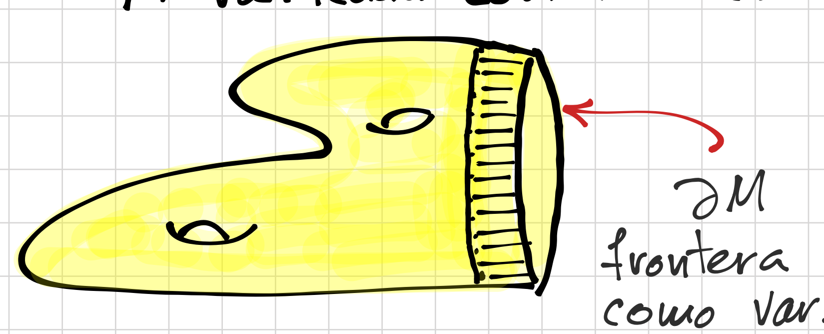
   Decimos que: (X, A) es un buen par.

Ejemplos:



(D^n, S^{n-1}) buen par.

M variedad con frontera



$(M, \partial M)$ es un buen par.

Prop: Si (X,A) buen par, $f: A \to Y$ mapeo, Y Hausdorff, y $Z = Y \cup_f X$ espacio de adjunción, entonces:

- (Z, Y) es un buen par.
- B collar de $A \Rightarrow Y \cup \tilde{f}(B)$ collar de Y.
- $\tilde{f}: X - A \xrightarrow{\approx} Z - Y$ homeomorfismo.

$f: (X,A) \to (Z,Y)$ homeomorfismo relativo

Tma: Si (X,A) buen par, Y & f como arriba, entonces:

$$H_q(f): H_q(X,A) \xrightarrow{\cong} H_q(Z,Y) \quad \text{es iso } \forall q.$$

Dem: B = collar de A en X.

$$\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "i_*", "\cong"'] \arrow[d, "\cong"', "?"] \arrow[dr, phantom, "="] & H_q(X,B) \arrow[d, "\cong"', "F_*"] \\
H_q(Z,Y) \arrow[r, "\cong", "j_*"'] & H_q(Z, Y \cup \tilde{f}(B))
\end{tikzcd}$$

① . F_* es isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
H_q(X-A, B-A) \arrow[r, "\cong", "\text{exc.}"'] \arrow[d, "\cong"', "\text{Hipótesis}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & H_q(X,B) \arrow[d, "\cong"] \\
H_q(Z-Y, \tilde{f}(B-A)) \arrow[r, "\cong", "\text{exc.}"'] & H_q(Z, Y \cup \tilde{f}(B))
\end{tikzcd}$$

(2) i_* es isomorfismo. (Lema del quinto)

$$\begin{tikzcd}
H_q(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "="] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "id"'] \arrow[dr, phantom, "="] & H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "="] & H_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "="] & H_{q-1}(X) \arrow[d, "id"] \\
H_q(B) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X,B) \arrow[r] & H_{q-1}(B) \arrow[r] & H_{q-1}(X)
\end{tikzcd}$$

(3). Similarmente, j_* es isomorfismo. $\blacksquare$

Se sigue que el diagrama
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{f}"] & Z = Y \cup_f X \\
A \arrow[u] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u]
\end{tikzcd}$$
produce una sucesión de Mayer-Vietoris:

$$\cdots \to H_q(A) \to H_q(X) \oplus H_q(Y) \to H_q(Z) \to H_{q-1}(A) \to \cdots$$

Caso especial: Pegado de una n-celda $(X,A) = (D^n, S^{n-1})$.

$$\cdots \to H_q(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_q(Y) \to H_q(Z) \to H_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

Notemos: $\tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$

Cor: (Efecto en los gpos. de H_* al pegar una n-celda.)

Sean $f: S^{n-1} \to Y$ mapeo, Y Hausdorff y $Z = Y \cup_f e^n$ el espacio de adjunción. Entonces:

① $\tilde{H}_q(Z) = \tilde{H}_q(Y) \qquad q \neq n,\ n-1.$

② $\tilde{H}_{n-1}(Z) = \tilde{H}_{n-1}(Y) \big/ im(f_*)$

$q = n-1$

$f: S^{n-1} \to Y$ pegado

$f_*: H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(Y)$

③ $q = n$

$$0 \to \tilde{H}_n(Y) \to \tilde{H}_n(Z) \to ker(f_*) \to 0$$

$f_*: H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(Y)$

$$\therefore \quad H_n(Z) = H_n(Y) \oplus ker(f_*)$$

Cor: Si Z es un complejo celular (finito) entonces:

- $H_q(Z)$ gpo. abeliano fin. gen. $\forall q$.
- Si n es la dim. máxima de las celdas de Z,

$$H_q(Z) = 0 \quad \forall q > n.$$

Tma: Homología de $\mathbb{C}P^n$.

$$H_q(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Dem: $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$

$n=1$ $\quad \mathbb{C}P^1 = e^0 \cup e^2 = S^2 \qquad H_q = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$

Suponemos para $n-1$ y calculemos para $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \cup e^{2n}$.

Corolario anterior implica:

- $H_q(\mathbb{C}P^n) = H_q(\mathbb{C}P^{n-1}) \qquad q \neq 2n, 2n-1$
- $H_{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) / \ker(f_*) = 0$
- $H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}) = H_{2n}(\mathbb{C}P^{n-1}) \oplus \ker(f_*) = \mathbb{Z}$.

0

$f_* : H_{2n-1}(S^{2n-1}) \longrightarrow H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1})$

∎

Tma: Homología de $\mathbb{H}P^n = e^0 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{4n}$

$$H_q(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 4, \dots, 4n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

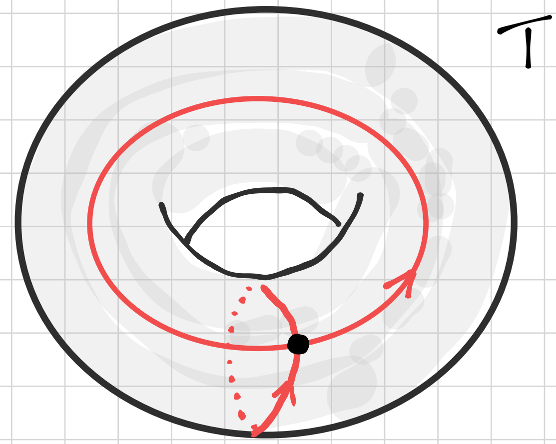
Tma: Homología de $\mathbb{R}P^n$.

$$H_q(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & q \text{ impar}, \quad 1 \leq q \leq n-1 \\ 0 & q \text{ par}, \quad 2 \leq q \leq n \\ \mathbb{Z} & q = n, \quad n \text{ impar} \\ 0 & q > n \end{cases}.$$

	$\mathbb{R}P^1$	$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{R}P^3$	$\mathbb{R}P^4$	$\mathbb{R}P^5$	$\mathbb{R}P^6$	$\mathbb{R}P^7$
H_1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
H_2	0	0	0	0	0	0	0
H_3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
H_4	0	0	0	0	0	0	0
H_5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
H_6	0	0	0	0	0	0	0
H_7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$

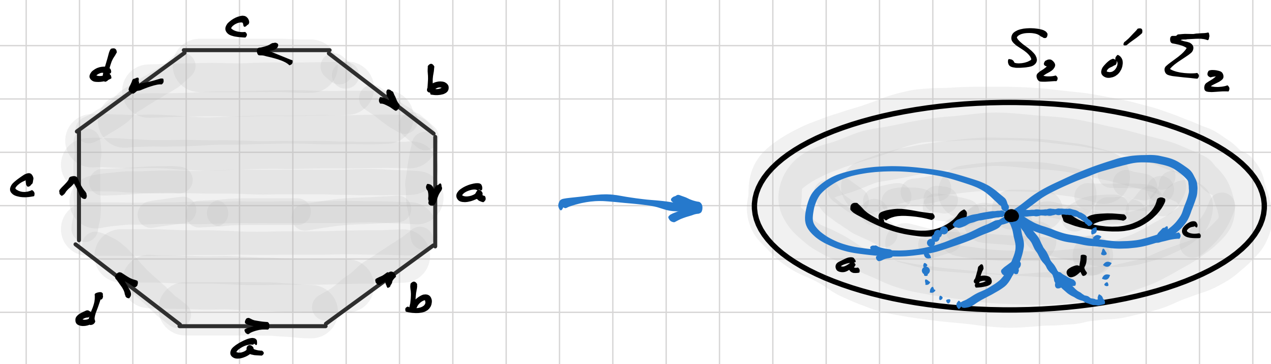
Ejem: Homología del Toro

$$H_q(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z}^2 & q=1 \\ \mathbb{Z} & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases}$$



Ejem: Superficie compacta, orientable, género 2.

$$H_q(S_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z}^4 & q=1 \\ \mathbb{Z} & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases}$$



Ejem: Sup. compacta, orientable, genero g: $S_g = \#_g T$

$$H_q(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & q=1 \\ \mathbb{Z} & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases}$$

Ejem: Sup. compacta, no orientable, género h: $N_h = \#_h \mathbb{RP}^2$

$$H_q(N_h) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z}^{h-1}\oplus \mathbb{Z}/2 & q=1 \\ 0 & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases}.$$

Tma: Sea (X,A) un buen par. Entonces:

$$H_q(X,A) \cong \tilde{H}_q(X/A) \quad \forall q \geq 0.$$

Dem: $Y = \{y_0\}$ un pto. y $f: A \to \{y_0\}$ mapeo cte.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] & Z = y_0 \cup_f X = X/A \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & \{y_0\} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

espacio cociente.

- X/A se obtiene de X colapsando A a un pto. $*$.
- $p: (X,A) \to (X/A, *)$ iso. en homología. (homeo. relativo)

S.E.L. del par $(X/A, *)$:

$$\cdots \to H_q(*) \to H_q(X/A) \xrightarrow{\cong} H_q(X,A) \to \tilde{H}_{q-1}(*) \to \cdots$$

∎

En este caso, la S.E.L. del par (X,A) se transforma en:

$$\cdots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X/A) \to \tilde{H}_{q-1}(A) \to \cdots$$