Cohomología Singular

Curso de Topología Algebraica
Miguel A. Xicoténcatl

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Diciembre 2020

Formas Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

$x_1, \ldots, x_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones coordenadas

$dx_1, \ldots, dx_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcionales lineales (1-formas)

Definición: Una k-forma diferencial en $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1, \ldots, i_k} \; dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

funciones suaves $X \to \mathbb{R}$ producto exterior de 1-formas

Ejemplos:

- 0- formas: $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones suaves
- 1-formas: $f_1 \, dx_1 + \ldots + f_n \, dx_n$
- 2-formas: $\sum_{i<j} f_{ij} \, dx_i \wedge dx_j$

$$\vdots$$

- n-formas: $f \quad dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$

Derivada exterior:

0-forma: $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \quad$ (1-forma)

k-forma: $\omega = \sum f_{i_1,\dots,i_k}\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$

$$d\omega = \sum d(f_{i_1,\dots,i_k})\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \quad (k+1)\text{-forma}$$

Propiedades:

1. $d(d\omega) = 0$.
2. $dx_i \wedge dx_i = 0$
3. $\omega = p$-forma, $\quad \eta = q$-forma $\quad \Rightarrow \quad \omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$.

   En particular: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

Notación: $\Omega^k(X) =$ espacio vectorial de k-formas diferenciales en X.

$$0 \to \Omega^0(X) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(X) \xrightarrow{d^1} \dots \to \Omega^{n-1}(X) \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(X) \to 0$$

Ejemplo: $X = \mathbb{R}^3$

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) = \{ \text{ funciones suves } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ \} = C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$\Omega^1(\mathbb{R}^3) = \{ \ f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz \ \} \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3) = \{ \ g_1\, dy \wedge dz + g_2\, dz \wedge dx + g_3\, dx \wedge dy \ \} \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$$\Omega^3(\mathbb{R}^3) = \{ \ f\ dx \wedge dy \wedge dz \ \} \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, equal] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, equal] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, equal] & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \arrow[d, equal] \\
C^\infty(\mathbb{R}^3) & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & C^\infty(\mathbb{R}^3)
\end{tikzcd}$$

$f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ $\qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\omega = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right)\wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right)\wedge dz \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy\wedge dz \; - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) dz\wedge dx \; + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

$$\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= (\partial_y f_3 - \partial_z f_2)\mathbf{i} - (\partial_x f_3 - \partial_z f_1)\mathbf{j} + (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)\mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\eta = g_1\, dy \wedge dz \;+\; g_2\, dx \wedge dz \;+\; g_3\, dx \wedge dy$$

$$\begin{aligned} d\eta \quad &= \quad \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} dx + \frac{\partial g_1}{\partial y} dy + \frac{\partial g_1}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} dx + \frac{\partial g_2}{\partial y} dy + \frac{\partial g_2}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial g_3}{\partial x} dx + \frac{\partial g_3}{\partial y} dy + \frac{\partial g_3}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \\ \\ &= \quad \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

$$\vec{G} = (g_1, g_2, g_3)$$

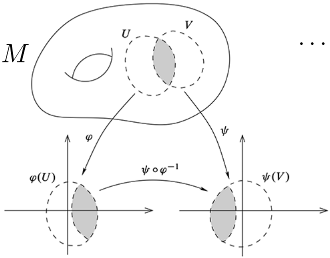
$$\nabla \cdot \vec{G} \;=\; \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \right)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d^0} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d^1} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d^2} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3)
\end{array}$$

$d \circ d = 0$ implica:

- $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Cohomología de De Rham: M variedad diferenciable



$$\dots \to \Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d^{q-1}} \Omega^q(M) \xrightarrow{d^q} \Omega^{q+1}(M) \to \dots$$

$$H^q_{\mathsf{DR}}(M) := \ker d^q / \mathrm{im}\ d^{q-1}$$

Teorema (De Rham) $H^*_{\mathsf{DR}}(M) \cong H^*_{\mathsf{sing}}(M;\mathbb{R})$.

Espacio Vectorial Dual

Definición: Si V es un espacio vectorial (dim. finita) sobre $\mathbb{R}$

$$V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = \{\, \varphi : V \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es lineal } \}$$

$$= \text{espacio vectorial c/operaciones obvias}$$

- Si $e_1, \ldots, e_n$ base para V, se define la base dual para V^*

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- Si $v = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$ y $\varphi = b_1 e_1^* + \ldots + b_n e_n^*$

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \sum_{i,j} b_i \cdot a_j \; e_i^*(e_j) \\ &= a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \\ &= \langle v \,,\, \varphi \rangle \qquad \text{¡Notación!} \end{aligned}$$

- Si $\quad T : V \to W \quad$ transf. lineal

  definimos una transf. lineal:

$$
\begin{aligned}
T^* : W^* &\longrightarrow V^* \\
\varphi \quad &\longmapsto \quad \varphi \circ T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T\circ\varphi"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

  y se cumple:

$$\langle\, v \,,\, T^*\varphi \,\rangle = \langle\, Tv \,,\, \varphi \,\rangle.$$

Definición: T^* es la transformación dual de T (o el adjunto de T).

Cohomología Singular

Definición: Cocadenas singulares de X

$$S^q(X) := Hom(S_q(X), \mathbb{Z}) = S_q(X)^*$$

- $z \in S_q(X)$, $\quad c : S_q(X) \to \mathbb{Z} \qquad \langle z, c \rangle$ = valor del hom. c en z

$$\langle z_1 + z_2, c \rangle = \langle z_1, c \rangle + \langle z_2, c \rangle$$
$$\langle z, c_1 + c_2 \rangle = \langle z, c_1 \rangle + \langle z, c_2 \rangle$$
$$\langle \alpha z, c \rangle = \alpha \langle z, c \rangle = \langle z, \alpha c \rangle$$

- $\langle \quad , \quad \rangle : S_q(X) \times S^q(X) \to \mathbb{Z}$ **bilineal.**

- Toda cocadena $c \in S^q(X)$ está determinada por sus valores en los q-simplejos de X.

$$\Rightarrow \qquad S^q(X) \cong \prod_{\substack{q\text{-simplejos} \\ \text{de } X}} \mathbb{Z} \qquad \text{(producto directo)}$$

Operador cofrontera: $\delta^q = (\partial_q)^* : S^{q-1}(X) \to S^q(X)$

$$\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$$

$$\boxed{\langle z, \delta^q c \rangle = \langle \partial_q z, c \rangle}$$

$$\cdots \to S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \to \dots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0$$

$$\cdots \leftarrow S^{q+1}(X) \xleftarrow{\delta^{q+1}} S^q(X) \xleftarrow{\delta^q} S^{q-1}(X) \leftarrow \dots \xleftarrow{\delta^1} S^0(X) \leftarrow 0$$

$$\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{im}(\delta^q) \subseteq \ker(\delta^{q+1})$$

Definición: q-ésimo grupo de cohomología de X

$$\boxed{H^q(X) = \frac{\ker\ \delta^{q+1}}{\mathrm{im}\ \delta^q}} = \frac{Z^q(X)}{B^q(X)} = \frac{\text{cociclos}}{\text{cofronteras}}$$

Funtorialidad: Si $f : X \to Y$ es un mapeo

Hom. inducido en cadenas: $S_q(f) : S_q(X) \to S_q(Y)$

Hom. dual en cocadenas: $S^q(f) : S^q(Y) \to S^q(X)$

$S^q(f)$ manda: cociclos en cociclos y cofronteras en cofronteras

e induce un homomorfismo

$$f^* : H^q(Y) \to H^q(X)$$

- Si (X, A) es un par topológico: $H_q(X, A) = H_q\left(\frac{S_*(X)}{S_*(A)}\right)$

$$0 \to S_*(A) \to S_*(X) \to \frac{S_*(X)}{S_*(A)} \to 0$$

Aplicando $Hom(- , \mathbb{Z})$:

$$0 \leftarrow S^*(A) \leftarrow S^*(X) \leftarrow Hom\left(\frac{S_*(X)}{S_*(A)}, \mathbb{Z}\right) \leftarrow 0$$

Complejo de cocadenas:

$$\ldots \leftarrow S^{q+1}(X,A) \xleftarrow{\bar{\delta}^{q+1}} S^q(X,A) \xleftarrow{\bar{\delta}^{q}} S^{q-1}(X,A) \leftarrow \ldots$$

Definición: q-ésimo grupo de cohomología de (X,A)

$$\boxed{H^q(X,A) = \frac{\ker\ \bar{\delta}^{q+1}}{\mathrm{im}\ \bar{\delta}^{q}}}$$

La S.E.C. de complejos de cocadenas

$$0 \leftarrow S^*(A) \leftarrow S^*(X) \leftarrow S^*(X,A) \leftarrow 0$$

induce una S.E.L. en cohomología:

$$0 \to H^0(X,A) \to H^0(X) \to H^0(A) \xrightarrow{d^*} H^1(X,A) \to H^1(X) \to \ldots$$

Propiedades de la Cohomología

1. Contravariante: $f : X \to Y \quad \Rightarrow \quad f^* : H^q(Y) \to H^q(X)$

2. Morfismo de conexión es natural c/r a mapeos de pares:

$f : (X, A) \to (Y, B)$

$$\begin{tikzcd} H^q(A) \arrow[r, "d^*"] & H^{q+1}(X, A) \\ H^q(B) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "d^*"] & H^{q+1}(Y, B) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

3. S.E.L. en cohomología del par (X, A):

$$0 \to H^0(X, A) \to H^0(X) \to H^0(A) \xrightarrow{d^*} H^1(X, A) \to H^1(X) \to \dots$$

4. Invarianza homotópica: $f, g : X \to Y$

$$f \simeq g \quad \Rightarrow \quad f^* = g^* : H^q(Y) \to H^q(X)$$

5. Excisión: $\overline{U} \subset \mathring{A} \quad \Rightarrow \quad H^q(X,A) \xrightarrow{\cong} H^q(X-U, A-U)$.

6. Si $X = \{x_0\}$ entonces

$$H^q(\{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 0. \end{cases}$$

Las propiedades 1 - 6 son los axiomas de Eilenberg-Steenrod.

7. Cohomología reducida: $c : X \to \{x_0\}$ mapeo constante

$$c^* : H^0(\{x_0\}) \to H^0(X) \quad \text{hom. inducido}$$

$$\bar{H}^0(X) := \operatorname{coker}(c^*) = H^0(X)/\operatorname{im}(c^*) = H^0(X)/\mathbb{Z} \quad \text{(diagonal)}$$

Para (X, A) pareja de espacios, $A \neq \varnothing$ ponemos:

$$\bar{H}^0(X, A) := H^0(X, A).$$

8. S.E.L. de la terna (X, Y, A) con $A \subseteq Y \subseteq X$

$$\ldots \to H^q(X, Y) \to H^q(X, A) \to H^q(Y, A) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(X, Y) \to \ldots$$

9. Sucesión exacta de Mayer-Vietoris

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Mismas hipótesis en H_*

$X = U \cup V$

$$\ldots \to H^q(X) \to H^q(U) \oplus H^q(V) \to H^q(U \cap V) \to H^{q+1}(X) \to \ldots$$

10. Sucesión de Mayer-Vietoris en H^* reducida.

11. $X \simeq *$ $\Rightarrow$ $\bar{H}^q(X) = 0 \quad \forall q \geq 0.$

Cohomología de Complejos Celulares

- S.E.L. del par $(D^n, S^{n-1}) \quad \Rightarrow \quad d^* : \bar{H}^q(S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H^{q+1}(D^n, S^{n-1})$

$$\bar{H}^q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

- Si $Z = Y \cup_f e^n$ con $f : S^{n-1} \to Y$ mapeo de pegado,
  1. $j^* : H^q(Z) \xrightarrow{\cong} H^q(Y)$ si $q \neq n,\ n-1$
  2. $H^{n-1}(Z) = \ker(f^*) \qquad f^* : H^{n-1}(Y) \to H^{n-1}(S^{n-1})$
  3. Se tiene una S.E.C.

$$0 \to \operatorname{coker}(f^*) \to H^n(Z) \to H^n(Y) \to 0$$

Ejemplo: $\mathbb{R}\mathsf{P}^2 = e^0 \cup e^1 \cup e^2$

$$= S^1 \cup_f e^2 \qquad f : S^1 \to S^1 \quad \text{mapeo de grado 2}$$

$$f^* : H^1(S^1) \xrightarrow{\times 2} H^1(S^1)$$

- $H^0(\mathbb{R}\mathsf{P}^2) = \mathbb{Z}$
- $H^1(\mathbb{R}\mathsf{P}^2) = \ker(f^*) = 0$
- $n = 2$

$$0 \to \operatorname{coker}(f^*) \xrightarrow{\cong} H^2(\mathbb{R}\mathsf{P}^2) \longrightarrow H^2(S^1) \to 0$$

$$H^2(\mathbb{R}\mathsf{P}^2) = \operatorname{coker}(f^*) = \mathbb{Z}/2.$$

Relación entre Homología y Cohomología

Existe un homomorfismo canónico:

$$\alpha : H^q(X) \longrightarrow H_q(X)^* = Hom(H_q(X), \mathbb{Z})$$
$$[\,c\,] \quad \longmapsto \quad \langle - \,;\, c \,\rangle$$

$$\alpha([\,c\,]) : H_q(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[\,z\,] \;\mapsto\; \langle\, z \,;\, c \,\rangle$$

Observación: En general $\alpha : H^q(X) \longrightarrow H_q(X)^*$ no es isomorfismo.

Ejemplo: $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$

$$H_q(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & q = 1 \\ 0 & q = 2 \end{cases} \qquad H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q = 1 \\ \mathbb{Z}/2 & q = 2 \end{cases}$$

El funtor Hom

Definición: Si A y G son grupos abelianos

$$Hom(A,G) := \{\ \varphi : A \to G \mid \varphi \text{ es homomorfismo } \}$$

$$= \quad \text{grupo abeliano con la suma}$$

- Si $\quad h : A \to A' \quad$ homomorfismo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\varphi\circ h"'] & A' \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$$h^* : Hom(A', G) \to Hom(A, G)$$

$$\varphi \quad \longmapsto \quad \varphi \circ h$$

- $Hom(-, G) : \mathcal{AB} \longrightarrow \mathcal{AB} \qquad$ funtor contravariante

$$A \ \mapsto \ Hom(A, G)$$
$$h \ \mapsto \ h^*$$

Propiedades de Hom

1. $Hom(-,G)$ es exacto por la izq.: Si $A' \to A \to A'' \to 0$ es exacta, al aplicar $Hom(-,G)$ se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to Hom(A'',G) \to Hom(A,G) \to Hom(A',G)$$

Ejemplo: Consideremos la S.E.C. $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ y apliquemos $Hom(-,\mathbb{Z})$:

$$0 \to Hom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} \underbrace{Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Z})}_{0} \xrightarrow{i^*} \underbrace{Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}}$$

2. $Hom(\mathbb{Z},G) \cong G$.

3. $Hom(\mathbb{Z}/m,G) \cong G[m] = \{x \in G \mid m \cdot x = 0\}$

4. $Hom(\mathbb{Z}/m,\mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/d$ con $d = m.c.d.(m,n)$

5. $Hom(\bigoplus_{i=1}^{m} A_i, G) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} Hom(A_i,G)$ $Hom(A, \bigoplus_{j=1}^{n} G_j) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} Hom(A,G_j)$

Teorema:
Si $A =$ gpo. abeliano f.g. entonces $A \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/m_\ell$

con $m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_\ell$.

Corolario: A, B grupos abelianos f. g. $\Rightarrow$ $Hom(A, B)$ es calculable.

El funtor Ext

Si A gpo. abeliano, ponemos $A = F/R$ con F gpo. ab. libre
y se tiene una S.E.C. $0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \to 0.$

Aplicando $Hom(-, G)$:

$$0 \to Hom(A, G) \xrightarrow{p^*} Hom(F, G) \xrightarrow{i^*} Hom(R, G)$$

Definición: $Ext(A, G) = \operatorname{coker}(i^*) = Hom(R, G)/\operatorname{im}(i^*)$

$Ext(A, G)$ mide la falla en la exactitud de $Hom(-, G)$.

Propiedades de Ext

1. Si $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ es una S.E.C., se tiene una suc. exacta

$$0 \to Hom(A'', G) \to Hom(A, G) \to Hom(A', G) \to$$
$$\to Ext(A'', G) \to Ext(A, G) \to Ext(A', G) \to 0$$

2. Si $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ es una S.E.C., se tiene una suc. exacta

$$0 \to Hom(A, G') \to Hom(A, G) \to Hom(A, G'') \to$$
$$\to Ext(A, G') \to Ext(A, G) \to Ext(A, G'') \to 0$$

3. Si F es un grupo abeliano libre $Ext(F, G) = 0$.

4. Si D es divisible $Ext(A, D) = 0$.

   Definición: Un grupo abeliano G es **divisible** si $\forall x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $y \in G$ tal que $n \cdot y = x$.

   Ejemplos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, S^1, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

5. $Ext(\bigoplus_i A_i, G) \cong \prod_i Ext(A_i, G)$ $\quad Ext(A, \prod_j G_j) \cong \prod_j Ext(A, G_j)$

6. $Ext(\mathbb{Z}/m, G) \cong G/mG$.

7. En general $Ext(A, G) \neq Ext(G, A)$ (contrario a $\otimes$ y Tor)

   Por ejemplo: $Ext(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m \neq 0 = Ext(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m)$.

Observaciones:

(a) $Ext(A, G)$ no depende de la representación $A = F/R$ como cociente de un gpo. libre abeliano por un subgrupo.

(b) En general, si R es un anillo y M, N R-modulos, se definen $Ext^i_R(M, N)$ $\forall i \geq 0$. Cuando $R = \mathbb{Z}$ (caso de grupos abelianos):

$$Ext^i_{\mathbb{Z}}(M, N) = \begin{cases} Hom(M, N) & i = 0 \\ Ext(M, N) & i = 1 \\ 0 & i \geq 2. \end{cases}$$

Cohomología con coeficientes (en un gpo. abeliano)

Si X es un espacio topológico

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \dots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \longrightarrow 0$$

Aplicando $Hom(-,G)$:

$$\dots \xleftarrow{\delta^{q+1}} Hom(S_q(X),G) \xleftarrow{\delta^q} \dots \xleftarrow{\delta^1} Hom(S_0(X),G) \longleftarrow 0$$

Definición: Cohomología de X con coeficientes en G

$$\boxed{H^q(X;G) := H^q\ (\ Hom(S_*(X),G)\ )}$$

Caso: $G = \mathbb{Z}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $H^*(X;\mathbb{Z}) = H^*(X)$ gpos. cohomología usuales.

Teorema (Coeficientes universales para H^*)

Para todo espacio X, gpo. abeliano G y $q \geq 0$ existe una S.E.C.

$$0 \to Ext(H_{q-1}(X), G) \to H^q(X; G) \xrightarrow{\beta} Hom(H_q(X), G) \to 0$$

que se escinde. Por tanto:

$$H^q(X; G) \;\cong\; Hom(H_q(X), G) \;\oplus\; Ext(H_{q-1}(X), G)$$

Caso $G = \mathbb{Z}$:

$$\boxed{H^q(X) \;\cong\; Hom(H_q(X), \mathbb{Z}) \;\oplus\; Ext(H_{q-1}(X), \mathbb{Z})}$$

Ejemplos

1. El "wedge" de r círculos $G_r = \bigvee_r S^1$

$$H^q(G_r) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}^r & q = 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

2. Superficie compacta, orientable, de género g

$$H^q(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & q = 1 \\ \mathbb{Z} & q = 2 \\ 0 & q > 2. \end{cases}$$

3. Espacio proyectivo complejo de de dim n

$$H^q(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q \text{ par} \leq n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

4. Superficie compacta, no orientable $N_h = \mathbb{R}\mathsf{P}^2 \# \ldots \# \mathbb{R}\mathsf{P}^2$

$$H^q(N_h; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}^{h-1} & q = 1 \\ \mathbb{Z}/2 & q = 2 \\ 0 & q > 2. \end{cases}$$

$$H^q(N_h; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & q = 0 \\ (\mathbb{Z}/2)^h & q = 1 \\ \mathbb{Z}/2 & q = 2 \\ 0 & q > 2. \end{cases}$$

5. El espacio proyectivo real de dim n. (coefs. mód 2)

$$H^q(\mathbb{R}\mathsf{P}^n; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & q = 0, \ldots, n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El Anillo de Cohomología

Si R es un anillo conmutativo con 1, $H^*(X;R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(X;R)$ tiene estructura de anillo graduado vía el *producto cup*:

$$\cup : H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R)$$

que satisface: $x \cup y = (-1)^{pq} y \cup x \quad \forall\, x \in H^p(X;R),\ y \in H^q(X;R)$ y $1 \in H^0(X;R)$.

Ejemplos:

1. $H^*(S^{2n+1};\mathbb{Z}) \cong \bigwedge(z), \qquad |z| = 2n+1.$
2. $H^*(S^{2n}\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]/(u^2), \qquad |u| = 2n.$
3. $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1}), \qquad |x| = 1.$
4. $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y]/(y^{n+1}), \qquad |y| = 2.$
5. $H^*(U(n);\mathbb{Z}) = \bigwedge(c_1, c_3, \ldots, c_{2n-1}) \qquad |c_i| = i.$

1 y 5 son álgebra exteriores, 2, 3 y 4 son álgebras de polinomios truncadas. $U(n)$ es el gpo. topológico de matrices unitarias $n \times n$.