Representaciones de Grupos de Lie

Prof. Miguel A. Xicoténcatl Merino
Departamento de Matemáticas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del IPN

Septiembre 2021

Referencias

Texto:

R. Carter, G. Segal, I. Macdonald; *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras.* London Mathematical Society, Student Texts 32. **(Parte 2)**

Grupos de matrices, grupos de Lie, teoría de representaciones:

1. M. Curtis; *Matrix Groups.* Universitext, Springer.
2. K. Tapp; *Matrix Groups for Undergraduates.* Student Mathematical Library Vol. 79, AMS.
3. G. James, M. Liebeck; *Representations and Characters of Groups.* Cambdrige.
4. S. Sternberg; *Group Theory and Physics.* Cambridge.
5. W. Fulton, J. Harris; *Representation Theory a First Course.* Graduate Texts in Mathematics 129, Springer.
6. S. Helgason; *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press.

Grupos de Lie

Definición: Un grupo es un conjunto G con una operación

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \mapsto g \cdot h$$

que es asociativa, posee elemento identidad $1 \in G$ y tiene inversos.

Grupo de Lie: Grupo G equipado con

- una topología y
- estructura de variedad diferenciable

Ejemplo: **El grupo general lineal**

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \\ &\subseteq M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{(como espacios vectoriales)} \end{aligned}$$

- $GL_n(\mathbb{R})$ es **abierto** en $M_n(\mathbb{R})$.

Ejemplo: El grupo ortogonal

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}$$

- $A \in O(n) \quad \Leftrightarrow \quad$ filas de A forman una base o.n. de $\mathbb{R}^n$

  $\Leftrightarrow \quad$ columnas de A forman base o.n. de $\mathbb{R}^n$

  $\Leftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserva normas, i.e.

  $$\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  $\Leftrightarrow \quad A$ preserva productos internos

  $$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

- $A \in O(n) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \pm 1$
- $O(n)$ tiene dos componentes conexas (rotaciones y reflexiones).

Proposición: El grupo ortogonal $O(n)$ es un grupo de Lie compacto, de dimensión $n(n-1)/2$.

Ejemplo: El grupo ortogonal especial

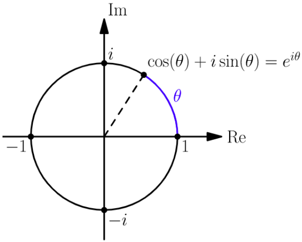
$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

$$= \text{ grupo de rotaciones de } \mathbb{R}^n$$

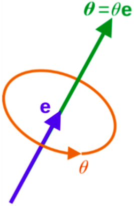
Caso $n = 2$:

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

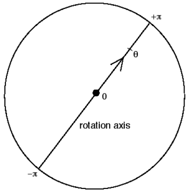
$$\cong \{ e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \} = \mathbb{T}$$



Caso $n = 3$: Todo elemento de $SO(3)$ está dado por un eje de rotación en $\mathbb{R}^3$ (dirigido) y un ángulo $-\pi \leq \theta \leq \pi$.



Espacio de todas las rotaciones:



$$SO(3) \approx \bar{B}(\vec{0}\,;\,\pi) \Big/ \begin{array}{l} \vec{x} \sim \pm\vec{x} \\ \forall\, x \in \partial\bar{B} \end{array}$$

$$= \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \qquad \text{espacio proyectivo real, dim 3}$$

Por lo tanto $SO(3)$ no es simplemente conexo. $\boxed{\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}/2}$

Ejemplo: El grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$

Definicion: Una isometría de $\mathbb{R}^3$ es una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \{\, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \text{ es una isometría} \,\} \\ &= \text{grupo bajo composición de funciones} \end{aligned}$$

- Toda $f \in E_3$ es de la forma $\boxed{f(x) = Ax + b}$ con $A \in O(3)$ y $b \in \mathbb{R}^3$.
- Si $f, g \in E_3$
$$f(x) = A_1 x + b_1$$
$$g(x) = A_2 x + b_2$$
$$\Rightarrow \quad (f \circ g)(x) = (A_1 A_2)x + (A_1 b_2 + b_1)$$
- E_3 es un producto semidirecto: $\boxed{E_3 = O(3) \ltimes \mathbb{R}^3}$

Observación: Toda $f \in E_3$ de la forma $f(x) = Ax + b$ se puede representar por una matriz de 4 x 4:

$$f = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A & & b_2 \\ & & & b_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Si $f = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \vec{b}_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ y $g = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & \vec{b}_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$

se tiene

$$(f \circ g) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \vec{b}_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A_2 & \vec{b}_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 A_2 & A_1 \vec{b}_2 + \vec{b}_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Luego E_3 es un subgrupo de $GL_4(\mathbb{R})$.

Análogos complejos

1. Grupo general lineal: $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$

2. Grupo especial lineal: $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$

3. Grupo unitario: $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = I_n\}$

   - El grupo unitario $U(n)$ es un grupo de Lie compacto, conexo, de dimensión n^2.

   - $A \in U(n) \quad \Rightarrow \quad |\det(A)| = 1$

4. El grupo unitario especial: $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$

Observación: Sucesión exacta corta $1 \to SU(n) \to U(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{T} \to 1$

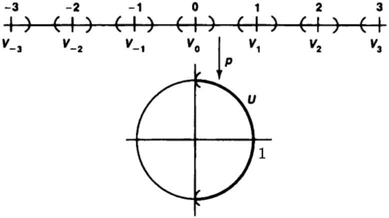
Grupos de Matrices

Definición: Un grupo de matrices es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$.

- Todo grupo de matrices es un grupo de Lie.
- No todo grupo de Lie es un grupo de matrices.
- Todo gpo. de Lie es localmente isomorfo a un gpo. de matrices.

Definición: Dos grupos G_1 y G_2 son *localmente isomorfos* si existe un *homeomorfismo* $f : U_1 \to U_2$ entre vecindades de los eltos. identidad de los respectivos grupos, tales que $f(xy) = f(x)f(y)$.

Ejem: $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ son localmente isomorfos



- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$
- $p(x) = e^{2\pi i x}$
- $p(x+y) = p(x) \cdot p(y)$

Si $|x| < \frac{1}{4}$ p es homeo.

El grupo de Heisenberg

Consideremos los sigs. subconjuntos de $GL_3(\mathbb{R})$:

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \middle| \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \middle| \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Entonces:

- N es subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$ y Z es subgrupo normal de N.
- El cociente $H_3 = N/Z$ es un grupo de Lie.
- H_3 no es un grupo de matrices, i.e. $H_3 \not\subseteq GL_n(\mathbb{R})$.

Ver: - G. Moreno, M.A. Torres; *Grupos de Lie que no son grupos de matrices.* **Morfismos** Vol. 1, no. 1, pp 27–33.

- G. Segal; Lie Groups (Capítulo 6)

Observación: El grupo H_3 se puede ver como grupo de transformaciones lineales en dimensión infinita.

Consideremos el espacio de Hilbert:

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \middle| \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

y sean

$$T_a, \ M_b, \ U_c \ : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

los operadores:

$$\begin{aligned} (T_a f)(x) &= f(x-a) \\ M_b \ &= \text{multiplicación por } \ e^{2\pi i b x} \\ U_c \ &= \text{multiplicación por } e^{2\pi i c} \end{aligned}$$

Entonces los operadores de la forma $T_a \circ M_b \circ U_c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, forman un grupo isomorfo a H_3.

Grupos de Lie en dims. bajas

Grupos de Lie (conexos) **de dim. 1:**

$$\mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{(localmente isomorfos)}$$

Grupos de Lie (conexos, no abelianos) **de dim. 2:**

$$\begin{aligned} \mathit{Aff}_+(\mathbb{R}) &= \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, \;\; a > 0 \,\} \\ &= \text{transf. afines de } \mathbb{R} \text{ (preservan orientación)} \end{aligned}$$

Grupos de Lie de dim. 3: (salvo isomorfismo local)

- $SO(3)$
- $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
- $E_2 = O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$
- $N =$ matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$