Complexificación de un Grupo Compacto

Moisés Alfonso Espinosa

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
Laboratorio

13 de diciembre de 2021

Indice

Complexificación en un Espacio Vectorial

Dado V un espacio vectorial real, se construye el espacio

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

donde los elementos de $V_{\mathbb{C}}$ se escriben como

$$v = 1 \otimes v_1 + \mathrm{i} \otimes v_2$$
$$v = v_1 + iv_2$$

y equipado con la multiplicación escalar compleja

$$\alpha(v \otimes \beta) = v \otimes (\alpha\beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Existe un mapeo de conjugación $\sigma : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ el cual es una involucion ($\sigma^2 = id$).

Ademas se cumple $V_{\mathbb{C}} = V \oplus \mathrm{i}V$

Proposición

Si V es un espacio lineal real, W es un espacio lineal compleja , y $T : V \longrightarrow W$ es una transformación $\mathbb{R}$-lineal, entonces T se extiende ***unicamente*** *a un transformación $\mathbb{C}$-lineal $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow W$.*

Existe una correspondencia entre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, W)$$

Si $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ y $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, W)$, la correspondencia explicita es

$$\begin{aligned} \phi(v) &= \Phi(v \otimes 1) \qquad \lambda \in \mathbb{C}, v \in V \\ \Phi(\lambda \otimes v) &= \lambda\phi(v) \end{aligned} \tag{1}$$

Repaso de álgebras de Lie

Una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial con un mapeo lineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, el cual es una operación anti-simétrica y cumple con la identidad de Jacobi.

Dado un grupo de Lie, los vectores tangentes invariantes por la izquierda forman una álgebra de Lie, o equivalentemente T_eG tiene estructura de una álgebra de Lie.

Ejemplos

En el caso $G = Gl_n(\mathbb{R})$, se cumple que los elementos de su espacio tangente T_eG pertenecen $\mathbb{R}^{n\times n} \cong M_n(\mathbb{R})$. Entonces $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

Si $G = O_n$, consideremos una curva suave $A(t) = \mathbb{R} \longrightarrow O_n$ tal que $A(0) = 1$, recordando $A(t)A(t)^T = 1$.

$$A'(t)A(t)^T + A(t)A'(t)^T = 0 \tag{2}$$

como $X = A'(0)$ es un vector tangente, se cumple

$$X + X^T = 0 \tag{3}$$

Si $G = U_n$, análogamente se considera una curva suave $A(t) = \mathbb{R} \longrightarrow U_n$ tal que $A(0) = 1$, entonces

$$X + X^\dagger = 0 \tag{4}$$

Sin embargo este es espacio vectorial bajo los reales, ya que se tiene

$$(A + \mathrm{i}B)^\dagger = -A + \mathrm{i}B$$

Definición

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Líe real de un grupo real G y sea $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ una álgebra de Lie compleja. La *complexificación* del grupo G es un grupo de Lie complejo $G_{\mathbb{C}}$ que contiene a G como un subgrupo de Lie tal que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de isomorfo al álgebra de Lie de $G_{\mathbb{C}}$.

A $\mathfrak{g}$ de G es una forma real de la álgebra de Lie $G_{\mathbb{C}}$.

Proposición

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real, $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie compleja , y $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces π se extiende ***unicamente*** *a un homomorfismo de álgebras de Lie compleja $\pi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{h}$.*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \mathfrak{h})$$

Proposición

Si $\mathfrak{g}$ es una forma real de una álgebra de Lie compleja $\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathrm{i}\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

Es equivalente si $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo inyectivo, tal que $\mathfrak{h} = f(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{i}f(\mathfrak{g})$, entonces existe isomorfismo $f_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{h}$.

Si $f_{\mathbb{C}}(X + \mathrm{i}Y) = 0$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, se sigue $f(X) + \mathrm{i}f(Y) = 0$ y $f(X) = f(Y) = 0$, como f es inyectiva entonces $f_{\mathbb{C}}$ es inyectiva.

La suprayectividad surge por que $f(\mathfrak{g})$ expande a $\mathfrak{h}$, entonces $f_{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo.

- El ejemplo mas sencillo es tomar el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, entonces su complexificación es $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
- La complexificación de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ es $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
- Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$. Entonces $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$, es el álgebra de matrices complejas antisimetricas, ya que

$$C = A + \mathrm{i}B,$$

donde $A, B \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$.

Complexificaión de U_n

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$, resulta que $\mathfrak{u}_n$ puede encajarse dentro de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Esto implica $i\mathfrak{u}_n$ se convierta en el conjunto de matrices Hemitianas. Como las matrices complejas pueden descomponerse como una suma de matrices Hermitianas y anti-Hermitianas, se cumple

$$\mathfrak{u}_n \oplus i\mathfrak{u}_n = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}). \tag{5}$$

Entonces se cumple

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}_n \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

Ejemplo

El álgebra de Lie de U_1 esta formado por las matrices de la forma $\mathrm{i}(a)$ con $a \in \mathbb{R}$, tal que $\mathfrak{u}_1 = \mathrm{i}\mathbb{R}$. Entonces la complexificación de $\mathfrak{u}_1$ es

$$\mathfrak{u}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{i}\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} = \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C})$$

Proposición

El álgebra de funciones representativas $C_{alg}(U_n)$ en U_n es precisamente el álgebra $\mathbb{C}[a_{ij}, \Delta^{-1}]$ de funciones polinomiales en el grupo álgebraico $GL_n(\mathbb{C})$, donde $\Delta = det(a_{ij})$

- El espacio de funciones representativas $C_{alg}(U_n)$ son polinomios en a_{ij} y $\bar{a}_{ij}$
- $\bar{a}_{ij} = \frac{1}{\Delta}[\mathrm{Adj}(A)]_{ij}$, con $\Delta = \det(A)$

Proposición

*Cada representación de U_n es la restricción de una **única** representación holomorfica de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Observaciones

- No toda función continua en U_n puede extenderse a una función holomorfa en $GL_n(\mathbb{C})$, pero el conjunto de las funciones que si se extienden son densas en $C(U_n)$.
- Para las representaciones estándar $V = \mathbb{C}^n$ de U_n , la representación conjugada $\bar{V}$ es isomorfo a la representación dual V^*. Sin embargo V^* es holomorfa y $\bar{V}$ no.

Definición

Sea K un grupo de Lie conexo. Una complexificación de K consiste de un grupo complejo G con un homomorfismo de grupos de Lie, $i : K \longrightarrow G$, tal que si $f : K \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos dentro del grupo complejo H, existe una **única** extensión holomorfa $F : K \longrightarrow H$ tal que $f = F \circ i$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & G \arrow[dl, "F"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Teorema

Sea K un grupo de Lie conexo y compacto. Entonces para K existe una complexificación $i : K \longrightarrow G$ con G un grupo de Lie complejo , tal que el álgebra de Lie de G es la complexificación del álgebra de Lie de K. Cualquier representación de K puede ser extendido a una representación holomorfa de G

- Por el teorema de Peter-Weyl se tiene que K is isomorfo a un subgrupo de U_n.
- Existe un homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, donde $\mathfrak{k}$ es el álgebra de lie de K.
- $\mathfrak{k}$ se puede extender a un homomorfismo de álgebras de lie complejas $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Ahora sea $P = \{e^{iX} \mid X \in \mathfrak{k}\}$ y sea P' el conjunto de matrices Hermitianas definidas positivas, esto implica que existe un homeomorfismo $P' \times U_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Por otro lado $i\mathfrak{k}$ es un subespacio matrices Hermitianas, esto implica que $P \subset P'$ como un subespacio cerrado.

Así sea $G \cong P \times K$, el cual es un subgrupo de $Gl_n(\mathbb{C})$, de tal manera que el álgebra de Lie de G se descompone como $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$.

Ahora sea $f : K \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos Lie, induce un mapeo entre las álgebras de Lie de $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{h}$. Por tanto existe una única extensión $f_{\mathbb{C}} = \text{Lie}(G) \longrightarrow$ H. Esto homomorfismo de álgebras induce un homomorfismo entre grupos de Lie $F : G \longrightarrow H$

Propiedad universal

Propiedad Universal del Producto Tensorial

Sea R un anillo conmutativo, tal que M, N y P son R-módulos y $p : M \times N \longrightarrow P$ es un mapeo bilineal, existe un único homomorfismo $F : M \otimes N \longrightarrow P$ tal que $p = F \circ \otimes$.

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "p"'] & & M \otimes N \arrow[dl, "F"] \\
& P &
\end{tikzcd}
$$

Definición

• Un *objeto inicial* en una categoría es un objeto $x_0 \in \mathcal{C}$ tal que cualquier objeto $x \in \mathcal{C}$, existe solamente un morfismo $x_0 \longrightarrow x$.
• Un *objeto terminal* en una categoría es un objeto $x_\infty \in \mathcal{C}$ tal que cualquier objeto $x \in \mathcal{C}$, existe solamente un morfismo $x \longrightarrow x_\infty$

$$\begin{tikzcd} & x \\ x_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots \\ & y \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} x \arrow[dr] & \\ \vdots & x_\infty \\ y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Teorema

Para cualquiera 2 objetos iniciales (terminales) de alguna categoría, estos 2 son isomorfos.

$$x_0 \xrightarrow{\quad f \quad} x_1 \qquad\qquad x_0 \xrightarrow[\mathrm{id}_{x_0}]{f \circ g} x_0$$

$$x_1 \xrightarrow[\quad g \quad]{} x_0$$

Teorema

El producto tensorial $M \otimes_{\mathbb{R}} N$, es determinado hasta un isomorfismos por la propiedad universal

- Sea $\mathcal{C}$ una categoría formada por pares (P, p), donde P es un R-módulo y mapeo $p : M \times N \longrightarrow P$ es bilineal.
- Entonces un morfismo entre 2 objetos $X = (P, p)$ y (Q, q) es homomorfismo $f : P \longrightarrow Q$ tal que $q = f \circ p$.

Esto significa que $\otimes$ es un objeto inicial de esta categoría y esta determinado hasta un isomorfismo.

En general una propiedad universal es una caracterización de un objeto matemático que puede ser asociado con un objeto inicial o terminal de alguna categoría..

Definición

Sea K un grupo de Lie conexo. Una complexificación de K consiste de un grupo complejo G con un homomorfismo de grupos de Lie, $i : K \longrightarrow G$, tal que si $f : K \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos dentro del grupo complejo H, existe una **única** extensión holomorfa $F : K \longrightarrow H$ tal que $f = F \circ i$ y G esta caracterizado hasta un isomorfismo.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & G \arrow[dl, "F"] \\
& H &
\end{tikzcd}
$$

Referencias

Fibre bundles associated with space-time.
Reports on Mathematical Physics, 1(1):29–62, 1970.

C.J. Isham.
Modern Differential Geometry for Physicists.

Shoshichi Kobayashi.
Foundations of differential geometry. Vol I.

M. Nakahara.
Geometry, Topology and Physics, Second Edition.

Eduard Prugovecki.
Quantum Geometry, A Frameworkfor Quantum General Relativity, Chap. III.

Michael. Spivak.
A Comprehensive introduction to differential geometry. Vol II.

Loring W. Tu.
Differential Geometry, Connections, Curvature, and Characteristic Classes.