

# Complexificación de un Grupo Compacto

Moisés Alfonso Espinosa

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN  
Laboratorio

13 de diciembre de 2021

# Indice

- 1 Complexificación de un Grupo Matricial
- 2 Complexificación de  $U_n$
- 3 Complexificación de un grupo compacto

# Complexificación en un Espacio Vectorial

Dado  $V$  un espacio vectorial real, se construye el espacio

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

donde los elementos de  $V_{\mathbb{C}}$  se escriben como

$$v = 1 \otimes v_1 + i \otimes v_2$$

$$v = v_1 + iv_2$$

y equipado con la multiplicación escalar compleja

$$\alpha(v \otimes \beta) = v \otimes (\alpha\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Existe un mapeo de conjugación  $\sigma : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  el cual es una involucion ( $\sigma^2 = id$ ).

Ademas se cumple  $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$

## Proposición

Si  $V$  es un espacio lineal real,  $W$  es un espacio lineal compleja, y  $T : V \rightarrow W$  es una transformación  $\mathbb{R}$ -lineal, entonces  $T$  se extiende **unicamente** a un transformación  $\mathbb{C}$ -lineal  $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow W$ .

Existe una correspondencia entre

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, W)$$

Si  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  y  $\Phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, W)$ , la correspondencia explicita es

$$\begin{aligned} \phi(v) &= \Phi(v \otimes 1) & \lambda \in \mathbb{C}, v \in V \\ \Phi(\lambda \otimes v) &= \lambda \phi(v) \end{aligned} \tag{1}$$

# Repaso de álgebras de Lie

Una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial con un mapeo lineal  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ , el cual es una operación anti-simétrica y cumple con la identidad de Jacobi.

Dado un grupo de Lie, los vectores tangentes invariantes por la izquierda forman una álgebra de Lie, o equivalentemente  $T_e G$  tiene estructura de una álgebra de Lie.

## Ejemplos

En el caso  $G = GL_n(\mathbb{R})$ , se cumple que los elementos de su espacio tangente  $T_e G$  pertenecen  $\mathbb{R}^{n \times n} \cong M_n(\mathbb{R})$ . Entonces  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

Si  $G = O_n$ , consideremos una curva suave  $A(t) = \mathbb{R} \rightarrow O_n$  tal que  $A(0) = 1$ , recordando  $A(t)A(t)^T = 1$ .

$$A'(t)A(t)^T + A(t)A'(t)^T = 0 \quad (2)$$

como  $X = A'(0)$  es un vector tangente, se cumple

$$X + X^T = 0 \quad (3)$$

Si  $G = U_n$ , análogamente se considera una curva suave  $A(t) = \mathbb{R} \rightarrow U_n$  tal que  $A(0) = 1$ , entonces

$$X + X^\dagger = 0 \quad (4)$$

Sin embargo este es espacio vectorial bajo los reales, ya que se tiene

$$(A + iB)^\dagger = -A + iB$$

## Definición

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie real de un grupo real  $G$  y sea  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$  una álgebra de Lie compleja. La *complexificación* del grupo  $G$  es un grupo de Lie complejo  $G_{\mathbb{C}}$  que contiene a  $G$  como un subgrupo de Lie tal que  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  de isomorfo al álgebra de Lie de  $G_{\mathbb{C}}$ .

A  $\mathfrak{g}$  de  $G$  es una forma real de la álgebra de Lie  $G_{\mathbb{C}}$ .

## Proposición

*Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie real,  $\mathfrak{h}$  es un álgebra de Lie compleja, y  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces  $\pi$  se extiende **unicamente** a un homomorfismo de álgebras de Lie compleja  $\pi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{h}$ .*

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \mathfrak{h})$$

### Proposición

Si  $\mathfrak{g}$  es una forma real de una álgebra de Lie compleja  $\mathfrak{h}$  con  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ , entonces  $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

Es equivalente si  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un homomorfismo inyectivo, tal que  $\mathfrak{h} = f(\mathfrak{g}) \oplus if(\mathfrak{g})$ , entonces existe isomorfismo  $f_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{h}$ .

Si  $f_{\mathbb{C}}(X + iY) = 0$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , se sigue  $f(X) + if(Y) = 0$  y  $f(X) = f(Y) = 0$ , como  $f$  es inyectiva entonces  $f_{\mathbb{C}}$  es inyectiva.

La suprayectividad surge por que  $f(\mathfrak{g})$  expande a  $\mathfrak{h}$ , entonces  $f_{\mathbb{C}}$  es un isomorfismo.

- ▶ El ejemplo mas sencillo es tomar el álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ , entonces su complexificación es  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .
- ▶ La complexificación de  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  es  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ .
- ▶ Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ . Entonces  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ , es el álgebra de matrices complejas antisimétricas, ya que

$$C = A + iB,$$

donde  $A, B \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ .

# Complexificación de $U_n$

Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ , resulta que  $\mathfrak{u}_n$  puede encajarse dentro de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Esto implica  $i\mathfrak{u}_n$  se convierte en el conjunto de matrices Hermitianas. Como las matrices complejas pueden descomponerse como una suma de matrices Hermitianas y anti-Hermitianas, se cumple

$$\mathfrak{u}_n \oplus i\mathfrak{u}_n = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}). \quad (5)$$

Entonces se cumple

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}_n \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

Ejemplo

El álgebra de Lie de  $U_1$  está formada por las matrices de la forma  $i(a)$  con  $a \in \mathbb{R}$ , tal que  $\mathfrak{u}_1 = i\mathbb{R}$ . Entonces la complexificación de  $\mathfrak{u}_1$  es

$$\mathfrak{u}_1(\mathbb{C}) = i\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} = \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C})$$

### Proposición

El álgebra de funciones representativas  $C_{alg}(U_n)$  en  $U_n$  es precisamente el álgebra  $\mathbb{C}[a_{ij}, \Delta^{-1}]$  de funciones polinomiales en el grupo algebraico  $GL_n(\mathbb{C})$ , donde  $\Delta = \det(a_{ij})$

- ▶ El espacio de funciones representativas  $C_{alg}(U_n)$  son polinomios en  $a_{ij}$  y  $\bar{a}_{ij}$
- ▶  $\bar{a}_{ij} = \frac{1}{\Delta} [\text{Adj}(A)]_{ij}$ , con  $\Delta = \det(A)$

### Proposición

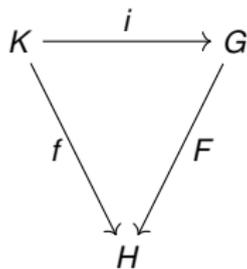
Cada representación de  $U_n$  es la restricción de una **única** representación holomorfica de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

# Observaciones

- ▶ No toda función continua en  $U_n$  puede extenderse a una función holomorfa en  $GL_n(\mathbb{C})$ , pero el conjunto de las funciones que si se extienden son densas en  $C(U_n)$ .
- ▶ Para las representaciones estándar  $V = \mathbb{C}^n$  de  $U_n$ , la representación conjugada  $\bar{V}$  es isomorfo a la representación dual  $V^*$ . Sin embargo  $V^*$  es holomorfa y  $\bar{V}$  no.

## Definición

Sea  $K$  un grupo de Lie conexo. Una complexificación de  $K$  consiste de un grupo complejo  $G$  con un homomorfismo de grupos de Lie,  $i : K \rightarrow G$ , tal que si  $f : K \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos dentro del grupo complejo  $H$ , existe una **única** extensión holomorfa  $F : K \rightarrow H$  tal que  $f = F \circ i$ .



## Teorema

*Sea  $K$  un grupo de Lie conexo y compacto. Entonces para  $K$  existe una complexificación  $i : K \rightarrow G$  con  $G$  un grupo de Lie complejo, tal que el álgebra de Lie de  $G$  es la complexificación del álgebra de Lie de  $K$ . Cualquier representación de  $K$  puede ser extendido a una representación holomorfa de  $G$*

- ▶ Por el teorema de Peter-Weyl se tiene que  $K$  es isomorfo a un subgrupo de  $U_n$ .
- ▶ Existe un homomorfismo de álgebras de Lie de  $\mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , donde  $\mathfrak{k}$  es el álgebra de Lie de  $K$ .
- ▶  $\mathfrak{k}$  se puede extender a un homomorfismo de álgebras de Lie complejas  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Ahora sea  $P = \{e^{iX} \mid X \in \mathfrak{k}\}$  y sea  $P'$  el conjunto de matrices Hermitianas definidas positivas, esto implica que existe un homeomorfismo  $P' \times U_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ .

Por otro lado  $i\mathfrak{k}$  es un subespacio matrices Hermitianas, esto implica que  $P \subset P'$  como un subespacio cerrado.

Así sea  $G \cong P \times K$ , el cual es un subgrupo de  $GL_n(\mathbb{C})$ , de tal manera que el álgebra de Lie de  $G$  se descompone como  $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$ .

Ahora sea  $f : K \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos Lie, induce un mapeo entre las álgebras de Lie de  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{h}$ . Por tanto existe una única extensión  $f_{\mathbb{C}} = \text{Lie}(G) \rightarrow H$ . Esto homomorfismo de álgebras induce un homomorfismo entre grupos de Lie  $F : G \rightarrow H$

# Propiedad universal

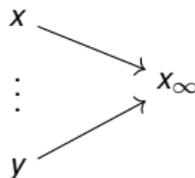
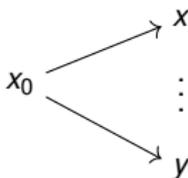
## Propiedad Universal del Producto Tensorial

Sea  $R$  un anillo conmutativo, tal que  $M, N$  y  $P$  son  $R$ -módulos y  $p : M \times N \rightarrow P$  es un mapeo bilineal, existe un único homomorfismo  $F : M \otimes N \rightarrow P$  tal que  $p = F \circ \otimes$ .

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes} & M \otimes N \\ & \searrow p & \swarrow F \\ & & P \end{array}$$

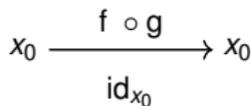
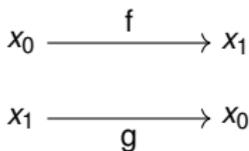
### Definición

- Un *objeto inicial* en una categoría es un objeto  $x_0 \in \mathcal{C}$  tal que cualquier objeto  $x \in \mathcal{C}$ , existe solamente un morfismo  $x_0 \rightarrow x$ .
- Un *objeto terminal* en una categoría es un objeto  $x_\infty \in \mathcal{C}$  tal que cualquier objeto  $x \in \mathcal{C}$ , existe solamente un morfismo  $x \rightarrow x_\infty$



### Teorema

*Para cualquiera 2 objetos iniciales (terminales) de alguna categoría, estos 2 son isomorfos.*



## Teorema

*El producto tensorial  $M \otimes_{\mathbb{R}} N$ , es determinado hasta un isomorfismo por la propiedad universal*

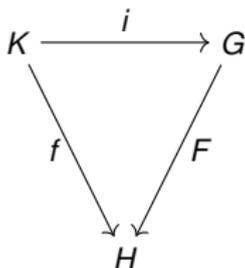
- ▶ Sea  $\mathcal{C}$  una categoría formada por pares  $(P, p)$ , donde  $P$  es un  $R$ -módulo y mapeo  $p : M \times N \rightarrow P$  es bilineal.
- ▶ Entonces un morfismo entre 2 objetos  $X = (P, p)$  y  $(Q, q)$  es homomorfismo  $f : P \rightarrow Q$  tal que  $q = f \circ p$ .

Esto significa que  $\otimes$  es un objeto inicial de esta categoría y esta determinado hasta un isomorfismo.

En general una propiedad universal es una caracterización de un objeto matemático que puede ser asociado con un objeto inicial o terminal de alguna categoría..

### Definición

Sea  $K$  un grupo de Lie conexo. Una complexificación de  $K$  consiste de un grupo complejo  $G$  con un homomorfismo de grupos de Lie,  $i : K \rightarrow G$ , tal que si  $f : K \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos dentro del grupo complejo  $H$ , existe una **única** extensión holomorfa  $F : K \rightarrow H$  tal que  $f = F \circ i$  y  $G$  está caracterizado hasta un isomorfismo.



# Referencias



Fibre bundles associated with space-time.

*Reports on Mathematical Physics*, 1(1):29–62, 1970.



C.J. Isham.

*Modern Differential Geometry for Physicists*.



Shoshichi Kobayashi.

*Foundations of differential geometry. Vol I*.



M. Nakahara.

*Geometry, Topology and Physics, Second Edition*.



Eduard Prugovecki.

*Quantum Geometry, A Framework for Quantum General Relativity, Chap. III*.



Michael. Spivak.

*A Comprehensive introduction to differential geometry. Vol II*.



Loring W. Tu.

*Differential Geometry, Connections, Curvature, and Characteristic Classes*.