Representaciones de Grupos No-Compactos

Un par de recordatorios de grupos compactos:

i) [Teorema] La parte isotípica V_p es un sub-espacio cerrado de V, y

$$V = \hat{\bigoplus_{p}} V_p$$

donde P varia sobre las "irrep" finito-dimensional.

ii) [Teorema] Todas las irrep de G son finito-dimensional.

¡Aquí G es un grupo de Lie y compacto!

Para mas detalles ver presentación del Cap 9, Segal.

Equivalentemente

[Teorema] Cualquier grupo de Lie compacto is isomorfico a un subgrupo de un grupo unitario U_n. "Grupo Matricial" $\varphi : G \longrightarrow U(n)$

Otra versión:

Primero, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f_{M;\xi;\eta}(g) = \langle \eta, g\xi \rangle$$

$$C_{alg}(G) \subset C(G)$$

[Teorema] $C_{alg}(G) = C(G)^{fin}$ es denso de $C(G)$ para la top de convergencia uniforme

Def: Sea V una rep de G. Definimos

$$V^{fin} = \{ \xi \in V ; \ \xi \in GV', \ V' \subset V \}.$$

La estructura de $C_{alg}(G)$

[Teorema] Existe un isomorfismo de reps de $G\times G$

$$\bigoplus \overline{P}\otimes P \longrightarrow C_{alg}(G) \qquad (1)$$

dado por

$$\eta\otimes\xi \longmapsto f_{P;\eta,\xi}$$

donde P varía sobre las irreps de G.

i) $\overline{P}\otimes P$ es una irrep de $G\times G$

ii) El isomorfismo (1) preserva productos internos

$$\langle \eta_1\otimes\xi_1, \eta_2\otimes\xi_2\rangle := \frac{1}{\dim(P)}\overline{\langle\eta_1,\eta_2\rangle}\langle\xi_1,\xi_2\rangle$$

Un aspecto analítico de lo anterior es:

$$f = \sum f_p$$

$f_p \in \mathrm{Im}(\overline{P} \otimes P)$ y

$$\|f\|_2^2 = \|\sum f_p\|^2 = \sum \frac{1}{\dim(P)} \|f_p\|^2$$

$\|f\|_2$ es la norma L^2 y $\|f_p\|$ la norma natural sobre $\overline{P} \otimes P$.

Series de Fourier

$$f(\theta) = \sum a_n e^{in\theta}.$$

L^2- funciones $\quad f$

C^∞- funciones $\quad f$

real-analitic functions $\quad f$

Un par de casas mas, $G \subset GL(n;\mathbb{C})$

$$\Pi : G \longrightarrow GL(V)$$

Π es irreducible si los únicos subespacios invariantes son V y $\{0\}$, donde un subespacio invariante $W \subset V$ es tal que

$$\Pi(g)w \in W \quad \forall g \in G \text{ y } w \in W.$$

Rep equivalentes:

(Π, V_1) y (Σ, V_2) son rep y $\Phi : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo entonces si

$$\Phi(\Pi(g)v) = \Sigma(g)\Phi(v),$$

(Π, V_1) y (Σ, V_2) son equivalentes.

Resulta que, en particular, en QM uno está interesado en espacios de Hilbert.

Representaciones unitarias: $\Pi : G \longrightarrow U(V)$

$U(V)$: grupo de transformaciones lineales invertibles que preservan el producto interno.

V : un espacio de Hilbert.

Por otra parte uno puede preguntarse por el Algebra de Lie un grupo G (Matricial). Es posible construir rep finito-dimensionales tal que

$$\pi : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(GL(V)) \quad ; \quad [X, Y]$$

Y mas aun, sea $\Pi : G \to GL(V)$ es una rep finito-dimensional de un grupo de Lie (matricial) conectado, y $\pi : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(GL(V))$. Sea $\langle \cdot , \cdot \rangle$ un producto interno en V. Entonces

Π es unitaria con respecto a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ si y solo si $\pi(X)$ es anti-auto-adjunto con respecto a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ para todo $X \in \mathcal{L}(G)$.

Ademas si $\Pi : G \to GL(V)$ entonces se puede obtener $\pi : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(GL(V))$ tal que

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$$

Uno podría llevar esto unos cuantos pasos mas hacia adelante y aprender que en el caso de rep finito dimensionales de un grupo G y de su algebra de Lie están bien relacionadas.

De hecho, en QM uno esta interesado, en realidad en el grupo cociente $U(V)/\{e^{i\theta} I\} = PU(V)$

¡Cuidado!

Y resulta que uno puede mostrar que existe un correspondencia entre $PU(V)$ de G y $U(V)_{\det A = 1}$ de $\tilde{G}$.

Representaciones infinito-dimensionales

Supongamos una rep infinito-dimensional de un grupo, por ejemplo $SO^+(1,2) \cong PSL(2,\mathbb{R}) \cong PSU(1,1)$

$$PSU(1,1) = SU(1,1) / \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$$

$$SU(1,1) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad |\alpha| - |\beta| = 1$$

Ahora si la rep puede convertirse en unitaria es natural (de la discusión previa) considerar la versión espacio de Hilbert (infinito).

De nuevo, (de la discusión anterior)

$$\Pi : G \to U(\mathbf{H})$$

podríamos intentar asociar algún tipo de rep π de $\mathcal{L}(G)$ haciendo lo siguiente

$$X \in \mathcal{L}(G) \qquad t \longmapsto \Pi(e^{tX})$$

entonces

existe un único operador auto-adjunto A tal que

$$\Pi(e^{tX}) = e^{itA} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

iA en general es no-acotado y definido solamente un subespacio denso de $\mathbb{H}$.

Por ejemplo: el grupo 1-paramétrico de rotaciones rígidas de S^1 es generado por el elemento de $\mathcal{L}(G)$ que actúa en $C^\infty(S^1)$

$$a \cdot f(x) = f(x \cdot a)$$
$$= f(x+a)$$

exponenciando

$$a \cdot f(x) = e^{a\frac{d}{dx}} f = f(x) + a\frac{df}{dx} + \frac{1}{2!}a^2\frac{d^2 f}{d^2 x} + \cdots = f(x+a)$$

$$L^2(S^1) \quad ; \quad C(S^1)$$

funciones cuadrado integrable en S^1

funciones continuas en S^1

Grupos Semisimples

[Proposición] El algebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ actua en V^{fin}.
Si G es un grupo semisimple y V una rep primero se considera la acción sobre V del subgrupo compacto maximal K de G, en consecuencia esto separa el subespacio denso V^{fin} de vectores K-finitos.

Por ejemplo

$$PSU(1,1) \qquad \pi \qquad V^{fin}: \sum a_k e^{ik\theta}$$

Sin embargo

$$e^{i\theta} \xrightarrow{\boxed{PSU(1,1)}} \frac{\alpha e^{i\theta} + \beta}{\bar{\beta} e^{i\theta} + \bar{\alpha}}$$

(Möbius Transf)

Por otra parte, si consideramos ~~el~~ generador

$$\frac{d}{d\theta}$$

existe una acción bien definida.

Ver presentación del Cap 9.

[Proposición] Si una irrep V de un grupo semi-simple G es descompuesta en partes isotípicas

$$V^{fin} = \bigoplus_{P} V_P$$

bajo la acción del subgrupo maximal compacto K de G, entonces $\dim(V_P)$ es finita para cada P.

$(K, \mathcal{L}(G))$-acción sobre V^{fin}

Observación: La mayoría de los representaciones infinito dimensionales no vienen de representaciones del grupo G.

Ejemplo: Sea G un grupo y X una variedad

$G \curvearrowright X$, y suponga $Y \subset X$ no estable

$\phi : G \times X \to X$, $Y \subset X$

$\phi(G \times Y) \subset Y$ (estable)

Sin embargo, $\mathcal{L}(G)$

$$\frac{d}{dt}\left(ge^{tA}\right)\Big|_{t=0} = gA$$

$$\sigma_t : G \to G.$$

Ejemplo: $\mathbb{R} \curvearrowright C^\infty(\mathbb{R})$ por traslación

El generador del álgebra de Lie por $\frac{d}{dx}$.

$C^\infty(a,b)$?

Para grupos compactos

$$f \in L^2 G$$

$$f = \sum_{P} f_P$$

En el caso no compacto (Teorema de Plancherel)

$$f = \int f_P \, d\mu(P)$$

$$\|f\|^2 = \int \|f_P\|^2 \, d\mu(P)$$

Referencias

* Lie Groups, Lie Algebras, and Representation theory. An Elementry Introduction, Brian Hall.
* Lectures on Lie Groups and Lie Algebras I. Macdonald, R. Carter, G. Segal.
* Quantum theory for Mathematicians, B. Hall.
* Irreducible unitary representations of Lorentz group, V. Bargmann.
* On non-compact groups. II Representation of the (2+1) Lorentz group.
* The 2+1 Lorentz group and its Representations K. Sjöstedt.

* The quantum theory of fields, Vol I, Cap 2, S. Weinberg.