SU_2, SO_3 y $SL_2\mathbb{R}$

Seminario de Representaciones de Grupos de Lie

Departamento de Matemáticas del CINVESTAV

Recubrimientos

Cuaternios

SU_2 y SO_3

$SL_2\mathbb{R}$

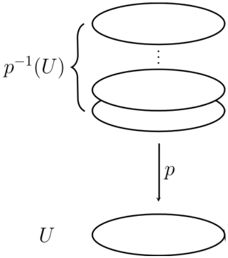
Un recubrimiento de espacio topológicos X, Y es un función continua

$$p : X \longrightarrow Y$$

tal que para cada punto de $y \in Y$ existe un abierto $y \in U$ que cumple que

$p^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i$ con V_i abierto en X

$p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo



Recubrimientos

Cuaternios

SU_2 y SO_3

$SL_2\mathbb{R}$

$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, con la base canónica $1, i, j, k$.
El producto satisface las identidades $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$\begin{tikzcd}
 & i \arrow[dl, bend right] & \\
j \arrow[rr, bend right] & & k \arrow[ul, bend right]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rc}
q = a + bi + cj + dk & |q_1 q_2| = |q_1||q_2| \\
\overline{q} = a - bi - cj - dk & q\overline{q} = |q|^2 \\
|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} & q \neq 0 \;\; q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}
\end{array}$$

$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\} \subset \mathbb{R}^4$

Recubrimientos

Cuaternios

SU_2 y SO_3

$SL_2\mathbb{R}$

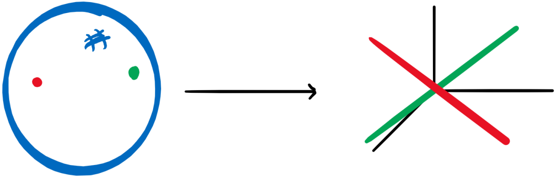
$$SU_2 = \{A \in M_2\mathbb{C} \mid A\bar{A}^t = id_2 \text{ y } det(A) = 1\}$$

$$SO_3 = \{A \in M_3\mathbb{R} \mid AA^t = id_3 \text{ y } det(A) = 1\}$$

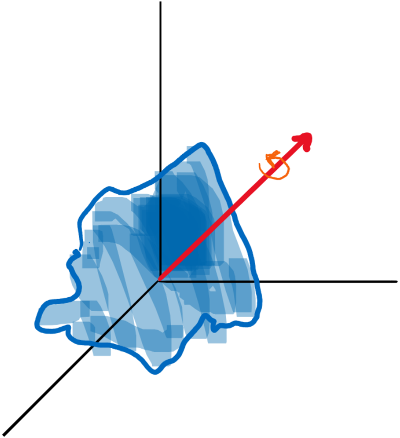
$$\begin{tikzcd}
SU_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & SO_3 \arrow[d, "\cong"] \\
S^3 \arrow[r] & \mathbb{R}P^3
\end{tikzcd}$$

$$SU_2 = \{A \in M_2\mathbb{C} \mid A\bar{A}^t = id_2 \text{ y } det(A) = 1\}$$

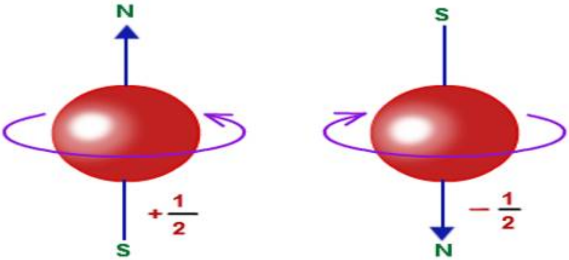
$$SO_3 = \{A \in M_3\mathbb{R} \mid AA^t = id_3 \text{ y } det(A) = 1\}$$



SO_3



SU_2



Cinvestav

$$A \in SU_2 \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{C} \text{ y } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$SU_2 \longrightarrow S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \longmapsto a + bj$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \longleftrightarrow i \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow j \qquad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow j$$

$q \in \mathbb{H}, q = q_0 + \vec{q}$ con $q_0 \in \mathbb{R}$ y $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$

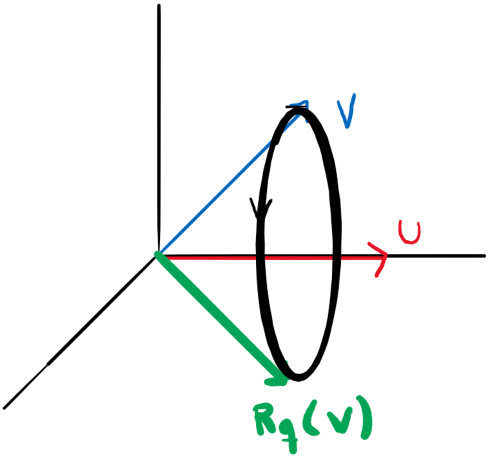
$$qh = q_0 h_0 - < \vec{q}, \vec{h} > + q_0 \vec{h} + h_0 \vec{q} + \vec{q} \times \vec{h}$$

Dado $q = cos\theta + usen\theta$ con $u \in \mathbb{R}^3$, $\|u\| = 1$ y $v = 0 + \vec{v}$

$$R_q(v) = qvq^{-1} \in \mathbb{R}^3$$

es una rotación con eje u y ángulo de giro 2θ

$$\begin{aligned} R : SU_2 &\longrightarrow SO_3 \\ q &\longmapsto R_q \end{aligned}$$



$$q = \cos\frac{\pi}{2} + u\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Sea $q \in \mathbb{H}$, entonces

$$R_q(v) = qvq^{-1} = (-q)v(-q)^{-1} = R_{-q}(v)\,\forall v \in \mathbb{R}^3$$

$$R_q = R_{-q}$$

Levantamiento de lazos:

$$\alpha : I \longrightarrow SO_3 \qquad \alpha(t) = R_{cos(\pi t)+usen(\pi t)}$$

es un lazo con punto base $id_{\mathbb{R}^3}$

$$\bar{\alpha} : I \longrightarrow SU_2 \qquad \alpha(t) = cos(\pi t) + usen(\pi t)$$

es un camino entre 1 y -1 video1 video2

$$\begin{aligned} R : SU_2 \times SU_2 &\longrightarrow SO_4 \\ (q,h) &\longmapsto R_{q,h} \end{aligned} \qquad\qquad R_{q,h}(v) = qvh^{-1}$$

$$R_{q,h} = R_{-q,-h}$$

$SO_{1,3} = \{A \in GL_4\mathbb{R} | A \text{ preserva la forma cuadrática } t^2 - x^2 - y^2 - z^2\}$

El grupo de Lorentz (grupo de Lorenzt reducido) es

$SO^+_{1,3} = \{A \in SO_{1,3} \mid A \text{ preserva la orientación del espacio y la dirección del tiempo}\}$

$$\begin{aligned} T : SL_2\mathbb{C} &\longrightarrow SO^+_{1,3} \\ g &\longmapsto T_g \end{aligned}$$

$(t, x, y, z) \leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} x+t & y+iz \\ y-iz & x-t \end{smallmatrix}\right) = A \in M_2\mathbb{C}.$ Entonces $T_g(A) = gA\bar{g}^t$

Poniendo $z = 0$ y cambiando $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ obtenemos

$$T : SL_2\mathbb{R} \longrightarrow SO^+_{1,2}$$

Identificmos $\mathbb{R}^3$ con las matrices simétricas 2×2

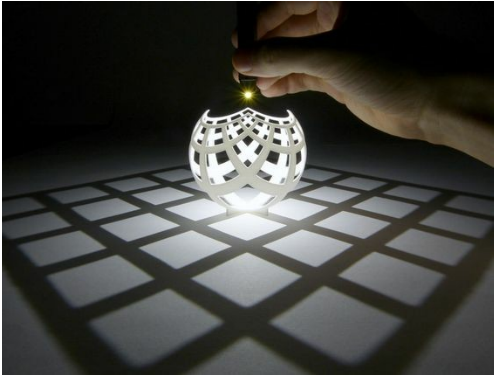
$$(t, x, y) \leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} x+t & y \\ y & x-t \end{smallmatrix}\right) = A \qquad T_g(A) = gAg^t$$

$$\Pi : SO_4 \longrightarrow SO_3 \times SO_3$$

$$SO_4 = SU_2 \times SU_2 / \{\pm(id, id)\}$$

$$\Pi_{g_1,g_2}(v_1, v_2) = (g_1 v_1 g_1^{-1}, g_2 v_2 g_1^{-1})$$

Consideremos a la esfera S^2 que se proyecta sobre $\mathbb{C}$ mediante la proyección esteográfica:



$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Una transformación de Möbius tiene la forma

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

Cualquier biholomorfismo de $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una transformación de Möbius $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tal que $ad - cd = 1$

$$\begin{aligned} SL_2\mathbb{C} &\longrightarrow M_1 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

$$M_1 \cong SL_2\mathbb{C}/\{id, -id\} \cong SO^+_{1,3}$$

Recubrimientos

Cuaternios

SU_2 y SO_3

$SL_2\mathbb{R}$

$$SL_2\mathbb{R} = \{A \in GL_2\mathbb{R} \,|\, det(A) = 1\}$$

$$SU_{1,1} = \{A \in GL_2\mathbb{C} \,|\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ y } |a| - |b| = 1\}$$

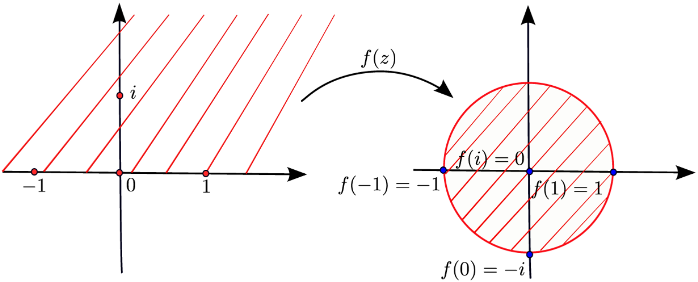
$$\begin{tikzcd}
SL_2\mathbb{R} \arrow[dr, hook] \arrow[dd, "\cong"'] & \\
& Gl_2\mathbb{C} \\
SU_{1,1} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$SL_2\mathbb{R}$ es el grupo transformaciones de Möbius que preservan el semiplano superior $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, im(z) > 0\}$.

$SU_{1,1}$ es el grupo transformaciones de Möbius que preservan el disco $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.

$$f : H \longrightarrow D$$
$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$



Los autovalores de los elementos de $A \in SL_2\mathbb{R}$ satisfacen la ecuación

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + 1 = 0$$

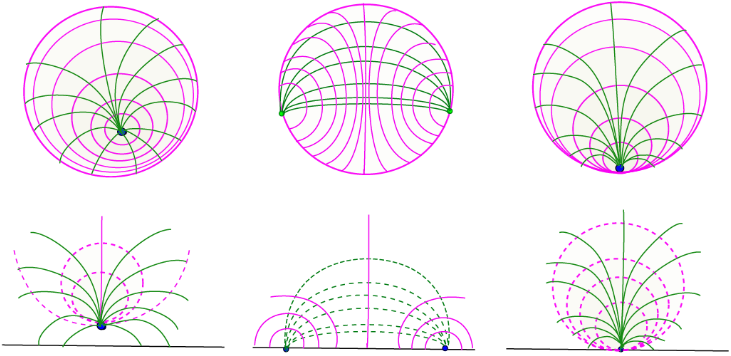
y por lo tanto se obtienen mediante

$$\lambda = \frac{tr(A) \pm \sqrt{tr(a)^2 - 4}}{2}$$

Si $|tr(A)| > 2$, entonces A se llama hiperbólica y es conjugada a $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ con $x \in \mathbb{R}^*$

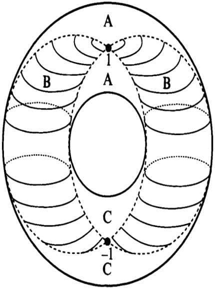
Si $|tr(A)| < 2$, entonces A se llama elíptica y es conjugada a $\left(\begin{smallmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{smallmatrix}\right)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Si $|tr(A)| = 2$, entonces A se llama parabólica y es conjugada a $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$



(1) Elíptica (2) Hiperbólica (3) Parabólica

$$SU_{1,1} \longrightarrow S^1 \times D$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \longmapsto \left(\frac{a}{|a|}, \frac{b}{a}\right)$$



A-unión de subgrupos isomorfos a S^1. Elípticos

B-unión de subgrupos isomorfos a $\mathbb{R}$. $tr(A) \geq 2$

C-elementos de $tr(a) < -2$

$$\mathbb{R} \times D \longrightarrow S^1 \times D \cong SL_2\mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \times D$ no es un grupo de matrices.