Espacios homogéneos

Definición

Decimos que un grupo G (topológico) actúa en un conjunto (espacio) X si existe una función (continua) $\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$

1. $1 \cdot x = x \ \forall x \in X$.
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ \forall g, h \in G$ *y* $x \in X$.

Dada $G \curvearrowright X$ definimos una R.E. sobre X:

$$x \sim y \iff \exists\, g \in G : x = g \cdot y$$

Denotamos

- $G \cdot x := \{g \cdot x : g \in G\} \subseteq X$ *para* $x \in X$ *(Órbita de x).*
- $Stab(x) := \{g \in G : g \cdot x = x\} < G$ *para* $x \in X$.
- $G \curvearrowright X$ *es* **transitiva** *si* $\exists\, x_0 \in X$ *tal que* $G \cdot x_0 = X$.

Observación

$G \curvearrowright X$ *es transitiva* $\iff \forall x, y \in X$ *existe* $g \in G$ *tal que* $x = g \cdot y$.

Definición

Los espacios en los cuales un grupo topológico actúa transitivamente son conocidos como **espacios homogéneos**.

Observación

Supongamos que $G \curvearrowright X$ *transitivamente. Sean* $x, y \in X$, *entonces* $x = g \cdot y$ *para algún* $g \in G$.

$$\begin{aligned} L_g : X &\xrightarrow{\approx} X \\ t &\longmapsto g \cdot t \end{aligned}$$

Así cualquier propiedad de un punto de X *es independiente del punto.*

La esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$

Ejemplo

$$\begin{aligned} O(n) \times \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ (A, x) &\longrightarrow Ax \end{aligned}$$

- $||Ax|| = ||x|| = 1 \ \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$ *y* $A \in O(n)$.
- $I \cdot x = x \ \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$.
- $A \cdot (B \cdot x) = (AB) \cdot x \ \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$ *y* $A, B \in O(n)$.

Sea $x \in \mathbb{S}^{n-1}$*. Completamos a una base o.n.* $\{x, v_2, \ldots, v_n\}$ *para* $\mathbb{R}^n$*. Definimos*

$$B := \begin{pmatrix} x & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in O(n), \qquad Be_1 = x$$

$\therefore \mathbb{S}^{n-1} = O(n) \cdot e_1$
$\therefore \mathbb{S}^{n-1}$ *es un espacio homogéneo.*

El semiplano superior

Ejemplo

Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$

$$SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

- $$\begin{aligned} Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right) \\ &= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \cdot \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{1}{|cz+d|^2} Im(z) > 0 \end{aligned}$$
- *Sea* $\omega = \alpha + i\beta \in \mathbb{H}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{i\sqrt{\beta} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}}{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} = \omega$$

$\therefore \mathbb{H} = SL_2(\mathbb{R}) \cdot i$

$\therefore \mathbb{H}$ *es un espacio homogéneo.*

Matrices simétricas positivas

Ejemplo

Sea $\mathcal{P} := \{P \in M_n(\mathbb{R}) : P = P^t, \quad \langle Px, x\rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (A, P) &\longmapsto APA^t \end{aligned}$$

- $I \cdot P = P \ \forall\ P \in \mathcal{P}$.
- $A \cdot (B \cdot P) = A \cdot BPB^t = A(BPB^t)A^t = (AB)P(AB)^t = AB \cdot P$ $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ *y* $P \in \mathcal{P}$.
- *Notemos que* $\langle APA^t x, x\rangle = \langle PA^t x, A^t x\rangle > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *y* $P \in \mathcal{P}$.

Matrices simétricas positivas

Ejemplo

Sea $\mathcal{P} := \{P \in M_n(\mathbb{R}) : P = P^t, \quad \langle Px, x\rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (A, P) &\longmapsto APA^t \end{aligned}$$

Sea $P \in \mathcal{P}$ *y* $\lambda < 0$. *Entonces*

$$||(P - \lambda I)x||^2 = ||Px||^2 - 2\lambda\langle Px, x\rangle + \lambda^2||x||^2 \geq \lambda^2||x||^2.$$

$\Longrightarrow P - \lambda I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es 1-1, luego invertible. Así* $\sigma(P) \subset (0, \infty)$.
Ahora sea $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ *tal que* $P = QDQ^t$, *donde* $D = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

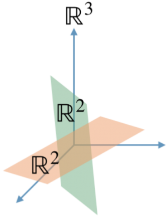
Observemos que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}^2$

$\Longrightarrow \ P = SS^t = S \cdot I$ *con* $S = Qdiag\{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\} \in GL_n(\mathbb{R})$.
$\therefore \mathcal{P} = GL_n(\mathbb{R}) \cdot I$
$\therefore \mathcal{P}$ *es un espacio homogéneo.*

Grassmanniana de k-planos en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Definimos a la Grassmanniana $Gr_k(\mathbb{R}^n) := \{V \leqslant \mathbb{R}^n : dim(V) = k\}$.



$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) \times Gr_k(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n) \\ (A, \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)) &\longmapsto \mathcal{L}(Av_1, \ldots, Av_k) \end{aligned}$$

Sean $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k), W = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_k) \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$. *Extendemos a bases de* $\mathbb{R}^n$

$$\beta = \{v_1, \ldots, v_k, v'_{k+1}, \ldots, v'_n\},\ \gamma = \{w_1, \ldots, w_k, w'_{k+1}, \ldots, w'_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

Sea $T : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ *transformación lineal tal que* $T(v_i) = w_i$ *y* $T(v'_j) = w'_j$, *entonces* $[T]_\alpha \cdot \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k) = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_k)$, *donde* $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

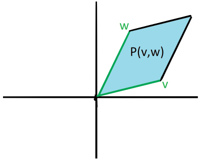
$\therefore$ $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ es un espacio homogéneo.

Retículas unimodulares

Ejemplo

Sea $\mathfrak{L}_1 := \{G < \mathbb{R}^2 : G \cong \mathbb{Z}^2\langle v, w\rangle, \acute{A}rea(P(v,w)) = 1\}$

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{L}_1 &\longrightarrow \mathfrak{L}_1 \\ (A, \langle v, w\rangle) &\longmapsto \langle Av, Aw\rangle \end{aligned}$$

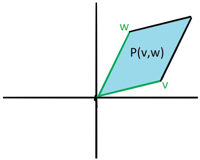


- $$\begin{aligned} \acute{A}rea(P(Av, Aw)) &= ||Av \times Aw|| \\ &= |det(A)|\; ||v \times w|| = \acute{A}rea(P(v,w)) = 1 \end{aligned}$$
- $I \cdot \langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle$
- $AB \cdot \langle v, w\rangle = A \cdot B \cdot \langle v, w\rangle$

Retículas unimodulares

Ejemplo

Sea $\mathfrak{L}_1 := \{G < \mathbb{R}^2 : G \cong \mathbb{Z}^2\langle v, w\rangle, \acute{A}rea(P(v,w)) = 1\}$



$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{L}_1 &\longrightarrow \mathfrak{L}_1 \\ (A, \langle v, w\rangle) &\longmapsto \langle Av, Aw\rangle \end{aligned}$$

Sea $G = \langle v, w\rangle \in \mathfrak{L}_1$. *Escribimos* $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, *entonces* $B := \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ *satisface* $Be_1 = v$ *y* $Be_2 = w$. *Más aún*

$$1 = A(P(v,w)) = ||v \times w|| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = ||(v_1 w_2 - w_1 v_2)\mathbf{k}|| = det(B)$$

Así $B \cdot \langle e_1, e_2\rangle = \langle Be_1, Be_2\rangle = \langle v, w\rangle$ *con* $B \in SL_2(\mathbb{R})$.

$\therefore \mathfrak{L}_1 = SL_2(\mathbb{R}) \cdot \langle e_1, e_2\rangle$

$\therefore \mathfrak{L}_1$ es un espacio homogéneo.

Sea G un grupo y $H < G$. Definimos una R.E. sobre G:

$$a \sim g \iff g^{-1}a \in H$$

$$[g]_\sim = \{a \in G : a \sim g\} = \{a \in G : g^{-1}a \in H\} = \{gh : h \in H\} = gH$$

Denotamos $G/H := \{gH : g \in G\}$ conocido como el **espacio cociente**.

Observación

G/H no necesariamente es un grupo. Por ejemplo, consideremos el grupo diédrico $D_6 = \{1, r, s, s^2, rs, rs^2\}$ y $H = \{1, r\} < D_6$. Entonces D_6/H no es grupo con la operación

$$\begin{aligned} D_6/H \times D_6/H &\longrightarrow D_6/H \\ (g_1H, g_2H) &\longmapsto g_1g_2H, \end{aligned}$$

porque $(1H)(sH) \neq sH$.
Sin embargo G/H sí es un grupo cuando $gHg^{-1} \subseteq H \ \forall g \in G$. En cuyo caso decimos que H es un subgrupo normal de G.

La **proyección canónica** está dada por

$$\pi : G \longrightarrow G/H, \quad g \longmapsto gH$$

Definimos la **topología cociente:**

$$U \subseteq G/H \text{ abierto} \Longleftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq G \text{ abierto}$$

Observación

Sea $x_0 \in X$ y $H := Stab(x_0) < G$. Supongamos que $G \curvearrowright X$ es transitiva, entonces

$$\begin{aligned} \varphi : G/H &\xrightarrow{\equiv} X \\ gH &\longrightarrow g \cdot x_0 \end{aligned}$$

$$aH = gH \Longleftrightarrow g^{-1}a \in H \Longleftrightarrow g^{-1}a \cdot x_0 = x_0 \Longleftrightarrow a \cdot x_0 = g \cdot x_0$$

Proposición

Sea X un espacio, G un grupo topológico tal que $G \curvearrowright X$ es transitiva y $H = Stab(x_0)$. Supongamos que $\begin{array}{rl} f_{x_0} : G & \longrightarrow X \\ g & \longmapsto g \cdot x_0 \end{array}$ *es una función abierta, entonces* $\begin{array}{rl} \varphi : G/H & \longrightarrow X \\ gH & \longmapsto g \cdot x_0 \end{array}$ *es un homeomorfismo.*

Demostración.

Si $U \subseteq G/H$ es abierto, $\varphi(U) = f_{x_0}(\pi^{-1}(U))$ es abierto. $\square$

Proposición

Sea X un espacio, G un grupo topológico tal que $G \curvearrowright X$ es transitiva y $H = Stab(x_0)$. Supongamos que $\begin{array}{rl} f_{x_0} : G & \longrightarrow X \\ g & \longmapsto g \cdot x_0 \end{array}$ *es una función abierta, entonces* $\begin{array}{rl} \varphi : G/H & \longrightarrow X \\ gH & \longmapsto g \cdot x_0 \end{array}$ *es un homeomorfismo.*

Demostración.

Si $U \subseteq G/H$ es abierto, $\varphi(U) = f_{x_0}(\pi^{-1}(U))$ es abierto. $\square$

Proposición

Sea X un espacio Hausdorff tal que $G \curvearrowright X$ transitivamente. Si

1. *G es compacto o bien*
2. *G y X son localmente compactos y G segundo numerable.*

Entonces f_{x_0} es una función abierta.

Ejemplos

1. $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n^2} & \xrightarrow{\Phi} & M_n(\mathbb{R}) \\ (a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

2. *Consideremos la función continua*

$$f : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \qquad f(B) = BB^t$$

Entonces $f^{-1}(\{I\}) = O(n)$ *es cerrado. Además*

$$\Phi^{-1}(O(n)) \subset \left\{ (a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \right\} \subseteq \overline{B}(0,\sqrt{n})$$

Por lo tanto $\Phi^{-1}(O(n))$ *es compacto. Así* $O(n)$ *es compacto.*

3. $det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) \neq 0\} = GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ *es abierto, luego* $GL_n(\mathbb{R})$ *loc. compacto y* 2^o *numerable.*

4. $det^{-1}(\{1\}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ *es cerrado, luego* $SL_n(\mathbb{R})$ *loc. compacto y* 2^o *numerable.*

Ejemplo

Sea $A \in O(n)$ *tal que* $A \in Stab(e_n)$ *i.e.* $Ae_n = e_n$, *entonces*

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \in O(n-1)$$

$$Stab(e_n) = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in O(n-1) \right\} \cong O(n-1)$$

$\therefore O(n)/O(n-1) \approx \mathbb{S}^{n-1}$

Ejemplo

Recordemos

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}, \qquad (A, P) \longmapsto APA^t$$

Entonces

$$A \in Stab(I) \iff AA^t = I \iff A \in O(n)$$

$\therefore Stab(I) = O(n)$ *y* $GL_n(\mathbb{R})/O(n) \approx \mathcal{P}$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{bd+ac+i(ad-bc)}{c^2+d^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} bd+ac = 0, \\ c^2+d^2 = 1. \end{cases} \quad \textit{Además}$$

$$1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2+b^2$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$$

Recíprocamente, sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2) \cap SL_2(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{bd+ac+i(ad-bc)}{c^2+d^2} = i$$

$$\therefore Stab(i) = SO(2) \text{ y } SL_2(\mathbb{R})/SO(2) \approx \mathbb{H}$$

Ejemplo

Sea $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$*, donde* $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$*,* $B \in M_{k\times n-k}(\mathbb{R})$*,* $C \in M_{n-k\times k}(\mathbb{R})$ *y* $D \in M_{n-k\times n-k}(\mathbb{R})$*.*

$$\mathbb{R}^k \times 0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}^k \times 0 = \mathcal{L}\left\{(a_{1,i}, \dots, a_{k,i}, c_{1,i}, \dots, c_{n-k,i}) : 1 \leq i \leq k\right\}$$

$\Longrightarrow C = 0$*. Además*

$$0 \neq \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D| \Longrightarrow A \in GL_k(\mathbb{R}),\ D \in GL_{n-k}(\mathbb{R})$$

Recíprocamente, supongamos que $A \in GL_k(\mathbb{R})$ *y* $D \in GL_{n-k}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}^k \times 0 = \mathcal{L}\left\{\sum_{j=1}^{k} a_{j,i} e_j : 1 \leq i \leq k\right\} = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k) = \mathbb{R}^k \times 0$$

$$\therefore Stab(\mathbb{R}^k \times 0) = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL_k(\mathbb{R}), D \in GL_{n-k}(\mathbb{R})\right\} =: GL_{k,n-k}$$

$$\therefore Gr_k(\mathbb{R}^n) \approx GL_n(\mathbb{R})/GL_{k,n-k}$$

Ejemplo

Sea $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(n)$, *donde* $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k\times n-k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-k\times k}(\mathbb{R})$ *y* $D \in M_{n-k\times n-k}(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{R}^k \times 0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}^k \times 0 = \mathcal{L}\left\{(a_{1,i}, \ldots, a_{k,i}, c_{1,i}, \ldots, c_{n-k,i}) : 1 \leq i \leq k\right\}$$

$\implies C = 0$. *Además*

$$I_n = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ B^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^t + BB^t & BD^t \\ DB^t & DD^t \end{pmatrix}$$

$\implies BD^t = 0$ *y* $DD^t = I_{n-k}$, *luego* $B = 0$ *y* $AA^t = I_k$.
Recíprocamente, supongamos que $A \in O(k)$ *y* $D \in O(n-k)$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}^k \times 0 = \mathcal{L}\left\{\sum_{j=1}^{k} a_{j,i} e_j : 1 \leq i \leq k\right\} = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = \mathbb{R}^k \times 0$$

$$\therefore Stab(\mathbb{R}^k \times 0) = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in O(k), D \in O(n-k))\right\} \cong O(k) \times O(n-k)$$

$$\therefore Gr_k(\mathbb{R}^k) \approx O(n)/O(k) \times O(n-k)$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ *tal que* $\langle e_1, e_2 \rangle = A \cdot \langle e_1, e_2 \rangle = \langle Ae_1, Ae_2 \rangle$, *entonces* $\exists\ n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ *tales que*

$$\begin{cases} ae_1 + ce_2 = Ae_1 = ne_1 + me_2 \\ be_1 + de_2 = Ae_2 = pe_1 + qe_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} n & p \\ m & q \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

Supongamos que $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, *entonces*

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{ad-bc}(dAe_1 - cAe_2) = dAe_1 - cAe_2 \\ e_2 = \frac{1}{ad-bc}(-bAe_1 + aAe_2) = -bAe_1 + aAe_2 \end{cases} \quad \in \langle Ae_1, Ae_2 \rangle$$

Así $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle Ae_1, Ae_2 \rangle = A \cdot \langle e_1, e_2 \rangle$.

$$\therefore Stab(\langle e_1, e_2 \rangle) = SL_2(\mathbb{Z}) \quad y \quad SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z}) \approx \mathfrak{L}_1$$

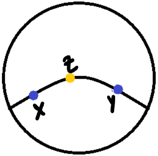
Teorema

$\mathfrak{L}_1 \approx \mathbb{S}^3 \setminus K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : z_1^2 + z_2^3 \neq 0\}.$

Espacios simétricos

Una variedad Riemanniana conexa X es un **espacio simétrico** si $\forall x \in X$ existe $f_x : X \longrightarrow X$ isometría tal que $f_x(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ para toda geodésica γ con $\gamma(0) = x$.

Los espacios simétricos son homogéneos. Así $X \approx Isom(X)/Stab(x_0)$.



Los espacios $\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{H}, Gr_k(\mathbb{R}^n), \mathcal{P}$ son simétricos.

Clasificación de espacios simétricos

Label	G	K	Dimension	Rank	Geometric interpretation
AI	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{SO}(n)$	$(n-1)(n+2)/2$	$n-1$	Space of real structures on $\mathbb{C}^n$ which leave the complex determinant invariant
AII	$\mathrm{SU}(2n)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$(n-1)(2n+1)$	$n-1$	Space of quaternionic structures on $\mathbb{C}^{2n}$ compatible with the Hermitian metric
AIII	$\mathrm{SU}(p+q)$	$\mathrm{S}(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q))$	$2pq$	$\min(p,q)$	Grassmannian of complex p-dimensional subspaces of $\mathbb{C}^{p+q}$
BDI	$\mathrm{SO}(p+q)$	$\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(q)$	pq	$\min(p,q)$	Grassmannian of oriented real p-dimensional subspaces of $\mathbb{R}^{p+q}$
DIII	$\mathrm{SO}(2n)$	$\mathrm{U}(n)$	$n(n-1)$	$[n/2]$	Space of orthogonal complex structures on $\mathbb{R}^{2n}$
CI	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{U}(n)$	$n(n+1)$	n	Space of complex structures on $\mathbb{H}^n$ compatible with the inner product
CII	$\mathrm{Sp}(p+q)$	$\mathrm{Sp}(p)\times\mathrm{Sp}(q)$	$4pq$	$\min(p,q)$	Grassmannian of quaternionic p-dimensional subspaces of $\mathbb{H}^{p+q}$
EI	E_6	$\mathrm{Sp}(4)/\{\pm I\}$	42	6	
EII	E_6	$\mathrm{SU}(6)\cdot\mathrm{SU}(2)$	40	4	Space of symmetric subspaces of $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})P^2$ isometric to $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{H})P^2$
EIII	E_6	$\mathrm{SO}(10)\cdot\mathrm{SO}(2)$	32	2	Complexified Cayley projective plane $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})P^2$
EIV	E_6	F_4	26	2	Space of symmetric subspaces of $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})P^2$ isometric to $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$
EV	E_7	$\mathrm{SU}(8)/\{\pm I\}$	70	7	
EVI	E_7	$\mathrm{SO}(12)\cdot\mathrm{SU}(2)$	64	4	Rosenfeld projective plane $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})P^2$ over $\mathbb{H}\otimes\mathbb{O}$
EVII	E_7	$E_6\cdot\mathrm{SO}(2)$	54	3	Space of symmetric subspaces of $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})P^2$ isomorphic to $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})P^2$
EVIII	E_8	$\mathrm{Spin}(16)/\{\pm\mathrm{vol}\}$	128	8	Rosenfeld projective plane $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})P^2$
EIX	E_8	$E_7\cdot\mathrm{SU}(2)$	112	4	Space of symmetric subspaces of $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})P^2$ isomorphic to $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})P^2$
FI	F_4	$\mathrm{Sp}(3)\cdot\mathrm{SU}(2)$	28	4	Space of symmetric subspaces of $\mathbb{O}P^2$ isomorphic to $\mathbb{H}P^2$
FII	F_4	$\mathrm{Spin}(9)$	16	1	Cayley projective plane $\mathbb{O}P^2$
G	G_2	$\mathrm{SO}(4)$	8	2	Space of subalgebras of the octonion algebra $\mathbb{O}$ which are isomorphic to the quaternion algebra $\mathbb{H}$

Estructuras complejas en $\mathbb{R}^{2n}$

Sea $\mathcal{J}_n := \{J \in O(2n) : J^2 = -I\}$. Notemos que $\langle Jx, x\rangle = 0 \ \forall J \in \mathcal{J}_n$ y $x \in \mathbb{R}^{2n}$ pues

$$\langle Jx, x\rangle = \langle Jx, -J^2x\rangle = \langle x, -Jx\rangle = -\langle Jx, x\rangle \Longrightarrow 2\langle Jx, x\rangle = 0$$

En particular $Jh_1 \notin \mathcal{L}\{h_1\}$. Sea $h_2 \notin \mathcal{L}\{h_1, Jh_1\}$, podemos suponer que h_2 es un vector unitario tal que $\langle h_2, h_1\rangle = \langle h_2, Jh_1\rangle = 0$ porque si no definimos $f_2 := h_2 - \langle h_2, h_1\rangle h_1 - \langle h_2, Jh_1\rangle Jh_1$ y $\tilde{h}_2 := \frac{f_2}{||f_2||}$

- $f_2 \notin \mathcal{L}\{h_1, Jh_1\}$
- $$\begin{aligned}\langle f_2, h_1\rangle &= \langle h_2 - \langle h_2, h_1\rangle h_1 - \langle h_2, Jh_1\rangle Jh_1, h_1\rangle \\ &= \langle h_2, h_1\rangle - \langle h_2, h_1\rangle ||h_1||^2 - \langle h_2, Jh_1\rangle\langle Jh_1, h_1\rangle = 0\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\langle f_2, Jh_1\rangle &= \langle h_2 - \langle h_2, h_1\rangle h_1 - \langle h_2, Jh_1\rangle Jh_1, Jh_1\rangle \\ &= \langle h_2, Jh_1\rangle - \langle h_2, h_1\rangle\langle h_1, Jh_1\rangle - \langle h_2, Jh_1\rangle ||Jh_1||^2 = 0\end{aligned}$$

Como $\langle Jh_2, h_1\rangle = -\langle h_2, Jh_1\rangle = 0$, se sigue que $\{h_1, Jh_1, h_2, Jh_2\}$ es un conjunto ortonormal y por tanto l.i.

Estructuras complejas en $\mathbb{R}^{2n}$

Si $2i < 2n$, entonces existe $h_{i+1} \notin \mathcal{L}\{h_1, Jh_1, \ldots, h_i, Jh_i\}$. S.p.d.g. suponemos que h_{i+1} es unitario y $\langle h_{i+1}, h_k \rangle = \langle h_{i+1}, Jh_k \rangle = 0$ para todo $k = 1, \ldots, i$ pues de lo contrario definimos

$$f_{i+1} := h_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle h_{i+1}, h_k \rangle h_k - \sum_{k=1}^{i} \langle h_{i+1}, Jh_k \rangle Jh_k \quad y \quad \tilde{h}_{i+1} := \frac{f_{i+1}}{||f_{i+1}||}$$

Como Jh_{i+1} es ortogonal a todo elemento de $\{h_1, Jh_1, \ldots, h_i, Jh_i, h_{i+1}\}$ obtenemos un conjunto o.n. $\{h_1, Jh_1, \ldots, h_{i+1}, Jh_{i+1}\}$. Así

$$\{v_1 = h_1, v_2 = Jh_1, v_3 = h_2, v_4 = Jh_2, \ldots, v_{2n-1} = h_n, v_{2n} = Jh_n\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que:

- $Jv_{2k-1} = Jh_k = v_{2k}\ \forall k = 1, \ldots, n.$
- $Jv_{2k} = J^2 h_k = -h_k = -v_{2k-1}\ \forall k = 1, \ldots, n.$

Consideremos

$$\begin{aligned} O(2n) \times \mathfrak{J}_n &\longrightarrow \mathfrak{J}_n \\ (A, J) &\longmapsto AJA^t \end{aligned}$$

- $(AJA^t)^2 = (AJA^t)(AJA^t) = AJ^2A^t = -I \ \forall A \in O(2n)$ y $J \in \mathfrak{J}_n$.
- Sean $J_1, J_2 \in \mathfrak{J}_n$, entonces existen bases ortonormales $\beta = \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ y $\gamma = \{w_1, \ldots, w_{2n}\}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ tales que

$$\begin{cases} J_1 v_{2k-1} = v_{2k} \\ J_1 v_{2k} = -v_{2k-1} \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} J_2 w_{2k-1} = w_{2k} \\ J_2 w_{2k} = -w_{2k-1} \end{cases}$$

Sea $A \in O(2n)$ tal que $Av_i = w_i \ \forall i = 1, \ldots, 2n$. Tenemos

a) $AJ_1A^t w_{2k} = AJ_1 v_{2k} = -Av_{2k-1} = -w_{2k-1} = J_2 w_{2k}$
b) $AJ_1A^t w_{2k-1} = AJ_1 v_{2k-1} = Av_{2k} = w_{2k} = J_2 w_{2k-1}$

$\Longrightarrow AJ_1A^t = J_2$.

$\therefore \mathfrak{J}_n$ es un espacio homogéneo.

Definimos

$$\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2n}(\mathbb{R}), \quad X + iY \longmapsto \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

- Si $I_n = (X + iY)(A + iB) = XA - YB + i(YA + XB)$ entonces

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XA - YB & -XB - YA \\ YA + XB & -YB + XA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

-

$$\begin{aligned} \varphi((X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2)) &= \varphi(X_1X_2 - Y_1Y_2 + i(Y_1X_2 + X_1Y_2)) \\ &= \begin{pmatrix} X_1X_2 - Y_1Y_2 & -(Y_1X_2 + X_1Y_2) \\ Y_1X_2 + X_1Y_2 & X_1X_2 - Y_1Y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix} \\ &= \varphi(X_1 + iY_1)\varphi(X_2 + iY_2) \end{aligned}$$

- Si $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \Longrightarrow X + iY = I_n$

$\therefore \varphi : GL_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_{2n}(\mathbb{R})$ es un monomorfismo.

- $$\begin{aligned}(X+iY)(X+iY)^* &= (X+iY)(X^t - iY^t)\\ &= XX^t + YY^t + i(YX^t - XY^t)\end{aligned}$$

- $$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^t & Y^t \\ -Y^t & X^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XX^t + YY^t & XY^t - YX^t \\ YX^t - XY^t & YY^t + XX^t \end{pmatrix}$$

Así $X + iY \in U(n) \iff \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in O(2n)$.

Por otro lado, sea $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^t & Y^t \\ -Y^t & X^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -YX^t + XY^t & -YY^t - XX^t \\ XX^t + YY^t & XY^t - YX^t \end{pmatrix}$$

$$y \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^t & Y^t \\ -Y^t & X^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XX^t + YY^t & XY^t - YX^t \\ YX^t - XY^t & YY^t + XX^t \end{pmatrix}$$

Así $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in Stab\left(\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\right) \iff \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in O(2n)$.

De lo anterior se tiene que

$\varphi(U(n)) \subseteq O(2n) \cap Stab\left(\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\right)$. Veamos la inclusión inversa.

Sea $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(2n) \cap Stab\left(\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix} = \varphi(A + iC) \in \varphi(U(n))$$

$\therefore \varphi| : U(n) \xrightarrow{\cong} O(2n) \cap Stab\left(\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\right)$

$\therefore \mathfrak{J}_n \approx O(2n)/U(n)$

Definimos la Grassmanniana isotrópica

$$Gr_n^{isotr}(\mathbb{C}^{2n}) := \{W < \mathbb{C}^{2n} : dim(W) = n,\ W \oplus \overline{W} = \mathbb{C}^{2n}\}$$

Hecho

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{J}_n & \xrightarrow{\approx} & Gr_n^{isotr}(\mathbb{C}^{2n}) \\ J & \longmapsto & \{z \in \mathbb{C}^{2n} : Jz = -iz\} \end{array}$$

Consideremos la forma bilineal

$$B(x,y) = y^t \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} x$$

Definimos

$$\begin{aligned} O_{2n}(\mathbb{C}) :&= \{g \in M_{2n}(\mathbb{C}) : B(gx, gy) = B(x,y)\ \forall x, y\} \\ &= \left\{ g \in M_{2n}(\mathbb{C}) : \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = g^t \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} g \right\} \\ P :&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & (a^t)^{-1} \end{pmatrix} : a^{-1}b = -(a^{-1}b)^t \right\} \end{aligned}$$

Proposición

$\mathfrak{I}_n \approx O_{2n}(\mathbb{C})/P$