Series de Fourier y teoría de representaciones
Seminario de Representaciones de Grupos de Lie

Alejandro Hernandez Arteaga

17 de noviembre de 2021

Plan

1. Series de Fourier
2. Representaciones de grupos
3. Series de fourier y representaciones

Expansión con senos y cosenos

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, función con periodo 2π, entonces

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F_m cos(mt) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F'_m sin(mt)$$

donde

$$F_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(mt)dt \quad \text{y} \quad F'_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(mt)dt$$

Notación exponencial

Alternativamente se puede usar la forma de ángulo fase para reescribir la transformada de Fourier de una función con periodo 2π como

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, función con periodo 2π, entonces

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{int}.$$

Donde

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Plan

Definición de representación

Una representación de un grupo de Lie G es un espacio vectorial V

Definición de representación

Una representación de un grupo de Lie G es un espacio vectorial V tal que

1. Cada $g \in G$ define un isomorfismo lineal $V \to V$, el cual escribimos como $v \mapsto gv$.
2. $(g_1 g_2)v = g_1(g_2 v)$ para $g_1, g_2 \in G$ y $v \in V$.
3. $(g, v) \mapsto gv$ es un mapeo continuo de $G \times V \to V$.

Definición alternativa

Una representación de un grupo G es un homomorfismo $\varphi\colon G \to GL(V)$, para algún espacio vectorial V.

Ejemplo

Tome $G = (\mathbb{Z}/4, +)$ y $V = \mathbb{C}$ y defina la acción de G en V como

$$[k]v \mapsto i^k v.$$

Luego

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k : k = 1, 2, 3, 4 \right\}$$

es un subgrupo de $GL(\mathbb{R}^2)$.

Ejemplo (continuación)

Identificando $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$, defina ahora $\varphi : G \to \mathcal{A}$ como

$$\varphi([j]) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^j .$$

Notemos que esto de manera geométrica equivale a rotar un punto en el plano en un ángulo de $90°$.

Se verifca que φ es un homomorfismo de grupos, las propiedades de la defincíón se tienen usando las propiedades de homomorfismo de φ.

Otro ejemplo

Tome $G = D_8$, donde $D_8 = \left\{a, b\colon a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\right\}$ y $V = \mathbb{R}^2$. Tomamos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Las cuales son son ambas invertibles pues su determinantes son no cero y además $A^4 = B^2 = I_2$ y $B^{-1}AB = A^{-1}$. Con estas condiciones se puede probar que el conjunto

$$\mathcal{B} := \left\{C \in GL_2(\mathbb{R})\colon\, C = A^i B^j 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1\right\}$$

es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$.

Otro ejemplo (continucación

Ahora sea $\rho\colon G \to \mathcal{B}$ definida por

$$\rho\colon a^i b^j \to A^i B^j$$

con $0 \leq i \leq 3$ y $0 \leq j \leq 1$ es un homomorfismo de grupos, luego $\mathbb{R}^2$ es una representación de D_8.

Conceptos adicionales de representaciones

Una representación V es **irreducible** si no contiene subespacios cerrados $G-invariantes$ distintos del 0 y V.

Conceptos adicionales de representaciones

Una representación V es **irreducible** si no contiene subespacios cerrados $G-$ *invariantes* distintos del 0 y V.

Cuando una representación es reducible, con un subespacio cerrado invariante W en general no se puede encontrar un subespacio invariante W' tal que $V = W \bigoplus W'$.

Conceptos adicionales de representaciones (Continuación)

Pero si V es unitaria, es decir, V es espacio de Hilbert y

$$\langle g\xi, g\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle \quad \forall \xi, \eta \in V,$$

para todo g elemento de G

Entonces W es invariante si y solo si $W^{\perp}$ es invariante, y además $V = W \oplus W^{\perp}$.

Conceptos adicionales de representaciones (Continuación)

Pero si V es unitaria, es decir, V es espacio de Hilbert y

$$\langle g\xi, g\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle \quad \forall \xi, \eta \in V,$$

para todo g elemento de G

Entonces W es invariante si y solo si $W^{\perp}$ es invariante, y además $V = W \oplus W^{\perp}$.
En particular cualquier representación de dimensión finita unitaria siempre es suma directa de irreducibles, esto se tiene ya que podemos ir reduciendo W y $W^{\perp}$ como suma de dos espacios invariantes hasta tener subespacios irreducibles, como la dimensión de V es finita, entonces este proceso de reducción es finito.

Lema de Schur

Lema (de Schur)

Si V_1 y V_2 son representaciones irreducibles de dimensión finita de G, entonces cualquier $G - mapeo$ $F\colon V_1 \to V_2$ (es decir, una transformación lineal tal que $f(g\xi) = gf(\xi)$) es cero o es un isomorfismo.
Más aún, si $V_1 = V_2$, entonces $f = \lambda 1$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$

Idea: Por ser f una transformación linea se tiene que $Ker(f)$ es un subespacio cerrado $G-invariante$ de V_1, por tanto solo puede ser 0 o V_1, si $Ker(f) = V_1$, entonces $f = 0$, si $Ker(f) = \{0\}$ entonces nos fijamos en $Im(f)$, al ser ambién un subespacio cerrado $G-invariante$ de V_2, entones $Im(f)$ solo puede ser 0 o V_2, si $Im(f) = \{0\}$, entonces $f = 0$, si $Im(f) = V_2$ entonces f es un isomorfismo.
La segunda parte se sigue de la anterior, ya que f o es cero o es isomorfismo, si es 0, entonces $\lambda = 0$, si es isomorfismo, entonces solo será un multiplo de la identidad.

Plan

Idea de relación de conceptos

Teorema

Para una función suave $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, tal que la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \quad a_n = \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

es absolutamente convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\leq n} a_k e^{ik\theta} = f(\theta) \quad \text{de manera uniforme}$$

Idea de relación de conceptos

Idea de demostración Sea $k \in \mathbb{Z}$ y defina

$$g_k(\theta) = \sum_{|k|\leq n} a_k e^{ik\theta},$$

por ser una suma finita de funciones continuas cada g_k es una función continua. Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, entonces la función

$$g(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\leq n} a_k e^{ik\theta}$$

es continua en $\mathbb{T}$.

Luego, la transformada de Fourier de $f - g$ es la función 0.

Por ser f y g ambas continuas se tiene que $f - g$ es una función continua y como su transformada de Fourier es 0, entonces $f - g$ es la función 0 y por tanto $f = g$.

Idea de relación de conceptos

Teorema

Para una representación V de $\mathbb{T}$, toda $\xi \in V$ se escribe como

$$\xi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n \quad \text{donde} \quad \xi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (R_\theta \xi) e^{in\theta} d\theta$$

$$R_\theta \xi = e^{-in\theta} \xi_n.$$

$R_\theta \colon V \to V$ es la acción de θ en V.

Idea de relación de conceptos

Idea de demostración Como $(R_\theta \xi)e^{in\theta}$ es una función continua de $\mathbb{T} \to V$, entonces $\xi_n \in V$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Como V es completo, entonces definiendo

$$g = \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\leq n} \xi_k$$

se sigue que $g \in V$. Luego para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} R_\theta(\xi - g)e^{in\theta}d\theta =& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(R_\theta(\xi)e^{in\theta} - R_\theta(g))e^{in\theta}d\theta = \\ & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \xi_n e^{-in\theta}e^{in\theta} - \xi_n e^{-in\theta}e^{in\theta}d\theta = \\ & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \xi_n - \xi_n d\theta.\end{aligned}$$

Por ser V representación y $(R_\theta(\xi - g))e^{in\theta}$ continua se sigue que $(R_\theta(\xi - g)) = 0$, luego $\xi - g = 0$ es decir $\xi = g$.

Teorema de Fourier y representaciones

Teorema

Si V es una representacion de $\mathbb{T}$, entonces $V = \hat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, donde

$$V_n = \left\{\xi \in V \colon R_\alpha \xi = e^{-in\alpha}\xi \quad \forall \alpha \in \mathbb{T}\right\}$$

y $\hat{\bigoplus}$ significa que cada V_n es un subespacio cerrado de V y que3 además cada $\xi \in V$ tiene una expansión convergente únican $\xi = \sum \xi_n$, donde $\xi_n \in V_n$

Nota: Aquí solo tenemos que $\bigoplus V_n$ es un subespacio denso de V, la notación con $\hat{\bigoplus}$ nota que es la completación algebraica de la suma, la cual en general no es única.

Ejemplo de aplicación

Teorema

El grupo de Heisenberg N/Z no es un grupo matricial.

N/Z tiene un subgrupo de circulo de $\mathbb{T}$

$$g_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Continuación de aplicación

1. $\mathbb{T}$ está contenido en el centro de N/Z.
2. Cada elemento de $\mathbb{T}$ es un conmutador $uvu^{-1}v^{-1}$ en N/Z.

Sea V una representación de dimensión finita de N/Z y un homomorfismo

$$\rho\colon N/Z \to Aut(V).$$

Veamos que ρ no es inyectiva. Por el teorema V puede ser descompuesta como $V = \bigoplus V_n$ bajo la acción de $\mathbb{T}$

Continuación de aplicación

Como $\mathbb{T}$ está en el centro de N/Z, cada V_n es un subespacio invariante de N/Z. g_t actuá en V_n como multiplicación por $e^{-2i\pi nt}$. Como es un conmutador, actuá con determinante 1. Lo cual es una contradiccón a menos de que $n = 0$. Por tanto $V = V_0$, $\mathbb{T}$ actuá de manera trivial en V y por tanto ρ no es inyectiva.

Bibliografía

- Carter, Roger; Segal, Graeme; Macdonald, Ian. (1995): Lectures on Lie Groups and Liea Algebras, Cambridge University Press.
- Hall, Brian C. (2003): Lie Groups, Lie Algebras and Representation, An Elementary Introduction, Springer, Cham, doi:10.1007/978-3-319-13467-3.
- Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. (2003): Fourier analysis, an introduction, Princeton University Press.
- James, Gordon; Liebeck, Martin (2001): Representations and characters of groups, Cambridge University Press.