El teorema de Peter-Weyl

Representaciones de grupos de Lie compactos

Definición

Sea G un grupo de Lie compacto. Una representación de G en un espacio vectorial V localmente convexo y completo, es un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ tal que $\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g,\xi) & \longmapsto & \varphi_g(\xi) = g \cdot \xi \end{array}$ *es continua.*

Observación

Toda representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ de un grupo de Lie compacto G tiene un producto interno G-invariante.

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \int_G \langle g \cdot \xi, g \cdot \eta \rangle dg$$

La representación $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$, $t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene productos internos $\mathbb{R}$-invariantes.

$$\langle (0,1),(1,0) \rangle = \langle \varphi_1(0,1), \varphi_1(1,0) \rangle = \langle (1,1),(1,0) \rangle = \langle (0,1),(1,0) \rangle + \langle (1,0),(1,0) \rangle$$
$$\Longrightarrow ||(1,0)||^2 = 0 \Longrightarrow (1,0) = \mathbf{0} \text{ !!}$$

Ejemplos

1. **Representación regular derecha**

$$\begin{array}{rcl} R : G & \longrightarrow & GL(L^2(G)) \\ g & \longmapsto & R_g \end{array}, \qquad \begin{array}{rrcl} R_g : & L^2(G) & \longrightarrow & L^2(G) \\ & f & \longmapsto & (x \mapsto f(xg)) \end{array}$$

2. **Representación regular izquierda**

$$\begin{array}{rcl} L : G & \longrightarrow & GL(L^2(G)) \\ g & \longmapsto & L_g \end{array}, \qquad \begin{array}{rrcl} L_g : & L^2(G) & \longrightarrow & L^2(G) \\ & f & \longmapsto & (x \mapsto f(g^{-1}x)) \end{array}$$

3. **Representación birregular**

$$\varphi : G \times G \longrightarrow GL(L^2(G)), \qquad \begin{array}{rrcl} \varphi(g,a) : & L^2(G) & \longrightarrow & L^2(G) \\ & f & \longmapsto & (x \mapsto f(g^{-1}xa)) \end{array}$$

4. $$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & SO(2) \\ e^{it} & \longmapsto & \begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Construcción de representaciones

Sean $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representaciones de G.

1. **Suma directa**

$$\begin{array}{rccc} \varphi \oplus \rho : & G & \longrightarrow & GL(V \oplus W) \\ & g & \longmapsto & ((v,w) \mapsto (\varphi_g(v), \rho_g(w)) \end{array}$$

2. **Producto tensorial**

$$\begin{array}{rccc} \varphi \otimes \rho : & G & \longrightarrow & GL(V \otimes W) \\ & g & \longmapsto & (v \otimes w \mapsto \varphi_g(v) \otimes \rho_g(w)) \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(Hom(V,W)) \\ g & \longmapsto & (T \mapsto \rho_g \circ T \circ \varphi_{g^{-1}}) \end{array}$$

4. **Representación conjugada**

$$\overline{\varphi} : G \longrightarrow GL(\overline{V})$$

$$g \longmapsto \varphi_g$$

Definición

- *Una representación $V \neq 0$ es irreducible si V no tiene subespacios cerrados G-invariantes, excepto 0 y V.*
- *Dos representaciones $\varphi : G \longrightarrow GL(P)$ y $\rho : G \longrightarrow GL(Q)$ son equivalentes si*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"', "\cong"] & P \arrow[d, "T", "\cong"'] \\ Q \arrow[r, "\rho_g"'] & Q \end{tikzcd}$$

Escribimos $\varphi \sim \rho$ o $P \cong Q$.

Lema de Schur

Si $\varphi : G \longrightarrow GL(P)$ y $\rho : G \longrightarrow GL(Q)$ son representaciones irreducibles de dimensión finita de un grupo de Lie G, entonces cualquier mapeo equivariante $f : P \longrightarrow Q$ es invertible ó $f = 0$. Además

1. Si $\varphi \not\sim \rho$, entonces $Hom_G(P; Q) = 0$;
2. Si $\varphi = \rho$, entonces $f = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición

Sean $\varphi : G \longrightarrow GL(P)$ *y* $\rho : G \longrightarrow GL(Q)$ *representaciones irreducibles de dimensión finita.*

1. $dim(Hom_G(P,Q)) = \begin{cases} 1, & P \cong Q, \\ 0, & P \ncong Q. \end{cases}$
2. *Si* G *es abeliano, entonces* $dim(P) = 1$*.*
3. *Hay un único producto interno* G*-invariante sobre* P*, salvo múltiplo escalar.*

Demostración.

1. Sea $T : P \longrightarrow Q$ un isomorfismo tal que $\rho_g T = T\varphi_g$ $\forall g \in G$. Si $f \in Hom_G(P,Q)$, entonces $T^{-1} \circ f : P \longrightarrow P$ es equivariante, de modo que $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T^{-1} \circ f = \lambda I$, luego $f = \lambda T$.

2. Sea $a \in G$, entonces

$$\varphi_a \varphi_g = \varphi_{ag} = \varphi_{ga} = \varphi_g \varphi_a \quad \forall g \in G$$

$\Longrightarrow \exists\, \lambda_a \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi_a = \lambda_a I$.
Ahora sea $0 \neq x \in P$ fijo y $k \in \mathbb{C}$, entonces

$$\varphi_a(kx) = \lambda_a kx \in \mathbb{C} \cdot x$$

$\therefore \mathbb{C} \cdot x = P$.

3. Sean $\langle\ ,\ \rangle, (\ ,\ )$ dos productos internos G-invariantes sobre P. Existe un operador lineal $L : P \longrightarrow P$ tal que $\langle x, y\rangle = (Lx, y)$ $\forall x, y \in P$. Dados $g \in G$ y $x, y \in P$, se tiene

$$(L(g \cdot x), g \cdot y) = \langle g \cdot x, g \cdot y\rangle = \langle x, y\rangle = (Lx, y) = (g \cdot Lx, g \cdot y)$$

Así $L(g \cdot x) = g \cdot Lx$. Por tanto, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L = \lambda I$ y $\langle x, y\rangle = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in P$.

$\square$

Proposición

Sea V una representación de un grupo de Lie compacto G y sea W un subespacio G-invariante. Entonces $W^{\perp}$ es un subespacio G-invariante.

Demostración.

Sea $x \in W^{\perp}$, $y \in W$ y $g \in G$, entonces

$$\langle g \cdot x, y \rangle = \langle x, g^{-1} \cdot y \rangle = 0$$

$V = W \oplus W^{\perp}$. $\square$

Corolario

Sea G un grupo de Lie compacto y sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación de dimensión finita. Entonces existen representaciones irreducibles $V_1, \ldots, V_k$ tales que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

Definición

Sea V una representación de G. Si P es una representación irreducible de G de dimensión finita, definimos la parte isotípica

$$V_P = \bigoplus_{\substack{W<V \\ W\cong P}} W$$

Equivalentemente, es la imagen de la inclusión

$$\begin{array}{rcl} \pi_P : P \otimes Hom_G(P;V) & \hookrightarrow & V \\ \xi \otimes f & \mapsto & f(\xi) \end{array}$$

- *Sea $W < V$ tal que $W \cong P$. Si $\iota : W \hookrightarrow V$ es la inclusión y $\xi \in W$, entonces $\xi = \pi_W(\xi \otimes \iota)$. Así $W \subseteq Im(\pi_W) = Im(\pi_P)$ y por lo tanto $V_P \subseteq Im(\pi_P)$.*
- *Ahora sea $f \in Hom_G(P;V)$. Como*

$$Hom_G(P;V) = Hom_G\left(P; \bigoplus_W W\right) = Hom_G\left(P; \bigoplus_{W\cong P} W\right),$$

$Im(f) \subseteq \bigoplus_{W\cong P} W = V_P$, *luego* $Im(\pi_P) \subseteq V_P$.

Definición

Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ *una representación de dimensión finita. El* **caracter** *de* φ *es la función* $\chi_\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por* $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g)\ \forall g \in G$.

Observación

El caracter χ_φ *no depende de la base de* V, *pues si* β *y* γ *son dos bases de* V, *entonces*

$$[\varphi_g]_\beta = A^{-1}[\varphi_g]_\gamma A \quad \forall g \in G$$

para alguna $A \in GL_n(\mathbb{C})$, *luego* $Tr([\varphi_g]_\beta) = Tr([\varphi_g]_\gamma)\ \forall g \in G$.

Ejemplo

Sea $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & SO(2) \\ & e^{it} & \longmapsto & \begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix} \end{array} \Longrightarrow \chi_\varphi(e^{it}) = 2cos(t)$

Observación

Sea $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ *una representación de dimensión finita y sea* $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base o.n. de* V, *entonces* $\chi_\rho(g) = \sum_1^n \langle v_i, \rho_g(v_i)\rangle$.

$$[\rho_g]_\beta = \begin{pmatrix} \langle v_1, \rho_g(v_1)\rangle & \cdots & \langle v_1, \rho_g(v_n)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, \rho_g(v_1)\rangle & \cdots & \langle v_n, \rho_g(v_n)\rangle \end{pmatrix}$$

Una **función representante** es una función de la forma

$$G \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad F_{M;\xi,\eta}(g) = \langle \eta, \varphi_g(\xi) \rangle$$

donde $\varphi : G \longrightarrow GL(M)$ es una representación unitaria de dimensión finita y $\xi, \eta \in M$.

Las funciones representantes forman una subálgebra $C_{alg}(G)$ de $C(G)$:

- $$\begin{aligned}(F_{M_1,\xi_1,\eta_1} + F_{M_2,\xi_2,\eta_2})(g) &= \langle \eta_1, \varphi_g(\xi_1) \rangle + \langle \eta_2, \rho_g(\xi_2) \rangle \\ &= \langle (\eta_1, \eta_2), (\varphi \oplus \rho)_g(\xi_1, \xi_2) \rangle \\ &= F_{M_1 \oplus M_2; \xi_1 \oplus \xi_2, \eta_1 \oplus \eta_2}(g)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(F_{M_1,\xi_1,\eta_1} \cdot F_{M_2,\xi_2,\eta_2})(g) &= \langle \eta_1, \varphi_g(\xi_1) \rangle \langle \eta_2, \rho_g(\xi_2) \rangle \\ &= \langle \eta_1 \otimes \eta_2, (\varphi \otimes \rho)_g(\xi_1 \otimes \xi_2) \rangle \\ &= F_{M_1 \otimes M_2; \xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2}(g)\end{aligned}$$
- $\lambda F_{M_1,\xi_1,\eta_1} = F_{M_1,\xi_1,\lambda\eta_1} = F_{\overline{M}_1,\lambda\xi_1,\eta_1}$

Definición

Sea V una representación de G. Definimos los **vectores G-finitos** *por*

$$V^{fin} = \{\xi \in V : \xi \text{ está en algún subespacio } G\text{−invariante de dim. finita de } V\}$$

Teorema

Si $G \curvearrowright C(G)$ por traslación izquierda, entonces $C(G)^{fin} = C_{alg}(G)$.

Demostración.

Supongamos que $f \in W$ para algún subespacio W de dimensión finita G-invariante de $C(G)$.
Sea $\beta = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una base ortonormal de W con $f_1 = f$ y sea

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L} & GL(W) \\ g & \longmapsto & (f_i \mapsto \sum_j M_{ji}(g) f_j) \end{array}$$

la restricción de la acción $G \curvearrowright C(G)$. Entonces

$$f(g) = L_{g^{-1}}(f)(1) = g^{-1} \cdot f_1(1) = \sum_j M_{j1}(g^{-1}) f_j(1) = \sum_j \overline{M_{1j}(g)} f_j(1)$$

Como $G \longrightarrow GL(\overline{W})$ está dada por $g \longmapsto (\overline{M_{ji}(g)})_{i,j}$ se sigue que $f \in C_{alg}(G)$. $\square$

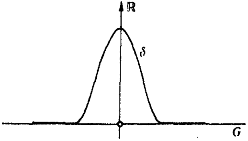
Teorema (Peter-Weyl)

$C(G)^{fin}$ es denso de $C(G)$ para la topología de convergencia uniforme.

Lema

Sea G un grupo de Lie compacto. Para toda vecindad U de $1 \in G$, existe una función continua $\delta : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\delta(x) \geq 0 \ \forall x \in G$,
2. $\delta(x) = 0 \ \forall x \notin U$,
3. $\delta(x) = \delta(x^{-1}) \ \forall x \in G$,



Demostración.

Como G es normal, existe $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in G$, $f(1) = 1$ y $f(U^c) = \{0\}$.
Definimos

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\int_G (f(gxg^{-1}) + f(gx^{-1}g^{-1}))dg$$

$\square$

Teorema (Peter-Weyl)

$C(G)^{fin}$ es denso de $C(G)$ para la topología de convergencia uniforme.

Demostración.

Sea $f \in C(G)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una vecindad $1 \in U$ tal que $U = U^{-1}$ y $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall x^{-1}y \in U$.
Sea $\delta : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua tal que $supp(\delta) \subset U$, $\delta(x) = \delta(x^{-1}) \ \forall x \in G$ y $\int_G \delta = 1$.
Ahora consideremos el operador $K : C(G) \longrightarrow C(G)$, definido por

$$Kf(x) := \int_G \delta(g) f(xg) dg \overset{(a=xg)}{=} \int_G f(a)\delta(x^{-1}a)da = \int_G f(a)\delta(a^{-1}x)da$$

Dado $x \in G$, tenemos

$$\begin{aligned} |Kf(x) - f(x)| &= \left| \int_G \delta(g) f(xg) dg - f(x) \right| = \left| \int_G \delta(g)(f(xg) - f(x))dg \right| \\ &\leq \int_G \delta(g)|f(xg) - f(x)|dg \leq \varepsilon \int_U \delta(g) = \varepsilon \end{aligned}$$

Sean $f, h \in C(G)$

$$\begin{aligned}\langle Kf, h\rangle &= \int_G Kf(x)\overline{h(x)}dx = \int_G \int_G \delta(a^{-1}x)f(a)\overline{h(x)}da\, dx\\ &= \int_G \int_G \delta(a^{-1}x)f(a)\overline{h(x)}dx\, da = \int_G f(a)\overline{Kh(a)}da = \langle f, Kh\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto K es autoadjunto. También K es compacto.
Notemos que

$$K(g\cdot f)(x) = \int_G \delta(a^{-1}x)f(g^{-1}a)da = \int_G \delta(s^{-1}g^{-1}x)f(s)ds = (g\cdot Kf)(x)$$

Así, si $Kf = \lambda f \Longrightarrow K(g\cdot f) = g\cdot \lambda f = \lambda(g\cdot f)$ i.e. E_λ es G-invariante.
Dada $f \in C(G)$, sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ un conjunto o.n. de eigenfunciones de K con correspondientes eigenvalores $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, entonces

$$Kf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, f_n\rangle f_n \in \overline{\bigoplus_{n\geq 1} E_{\lambda_n}} \subseteq \overline{C(G)^{fin}}$$

$\square$

Teorema de Peter-Weyl

Teorema

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *La parte isotípica V_P es un subespacio cerrado de V y*

$$V = \widehat{\bigoplus_P} V_P,$$

donde P varía en todas las representaciones irreducibles de G de dimensión finita.

2. *Cualquier grupo de Lie compacto G, es isomorfo a un subgrupo de un grupo unitario.*

$$\varphi : G \hookrightarrow U(n)$$

3. *$C_{alg}(G)$ es un subanillo denso de $C(G)$ para la topología de convergencia uniforme.*

3. $\Longrightarrow$ 2. Sea $g \in G \setminus \{1\}$. Entonces existe $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(g) \neq f(1)$. Dado que $C(G) = \overline{C_{alg}(G)}$, existe una representación $\rho^{(1)} : G \longrightarrow GL(V_1)$ y $\xi_1, \eta_1 \in V_1$ tales que

$$||F_{V_1;\xi_1,\eta_1} - f||_\infty < \frac{|f(g) - f(1)|}{2}$$

Notemos que $\langle \eta_1, \rho_g^{(1)}(\xi_1)\rangle = F_{V_1;\xi_1,\eta_1}(g) \neq F_{V_1;\xi_1,\eta_1}(1) = \langle \eta_1, \xi_1\rangle$ pues

$|f(g) - f(1)| \leq |f(g) - F_{V_1;\xi_1,\eta_1}(g)| + |F_{V_1;\xi_1,\eta_1}(1) - f(1)| \leq 2||F_{V_1;\xi_1,\eta_1} - f||_\infty$

Así $ker\rho^{(1)} \subsetneq G$. Si $ker\rho^{(1)} \neq \{1\}$ tomamos $g' \in ker\rho^{(1)} \setminus \{1\}$ y $\rho^{(2)} : ker\rho^{(1)} \longrightarrow GL(V_2)$ representación con $ker\rho^{(1)} \cap ker\rho^{(2)} \subsetneq ker\rho^{(1)}$. Continuamos con este proceso

$$ker\rho^{(1)} \supsetneq ker\rho^{(1)} \cap \rho^{(2)} \supsetneq ker\rho^{(1)} \cap ker\rho^{(2)} \cap ker\rho^{(3)} \supsetneq \ldots$$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $ker\rho^{(1)} \cap \ldots \cap ker\rho^{(N)} = \{1\}$, luego

$$\begin{array}{rccc} \rho^{(1)} \oplus \cdots \oplus \rho^{(N)} : & G & \hookrightarrow & GL(V_1 \oplus \cdots \oplus V_N) \\ & g & \mapsto & \begin{pmatrix} \rho_g^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho_g^{(N)} \end{pmatrix} \end{array}$$

2. $\Longrightarrow$ 3.

- Sea $\rho : G \hookrightarrow GL(V)$ una representación fiel. Sean $g \neq h$, entonces $\rho_g \neq \rho_h$. Así

$$F_{V;\xi,\eta}(g) = \langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \neq \langle \eta, \rho_h(\xi) \rangle = F_{V;\xi,\eta}(h)$$

para algunos $\eta, \xi \in V$.

- $C_{alg}(G)$ contiene a las funciones constantes. Basta considerar la representación

$$G \longrightarrow GL(V), \quad g \longmapsto I$$

- $\overline{F_{V;\xi,\eta}} = F_{\overline{V};\xi,\eta} \in C_{alg}(G)$.

$\therefore \overline{C_{alg}(G)} = C(G)$.

1. $\Longrightarrow$ 3.

$$C_{alg}(G) = C(G)^{fin} = \bigoplus_P C(G)_P \implies C(G) = \overline{C_{alg}(G)}$$

3. $\Longrightarrow$ 1. Para toda $f \in C(G)$ definimos

$$T_f : V \longrightarrow V, \quad T_f\xi = \int_G f(g) g \cdot \xi \, dg$$

Sea $M < V$ una representación unitaria de dimensión finita de G, $\xi \in M$ y $\zeta \in V$. Sea

$$W := \{T_{F_{M;\xi,\eta}}\zeta : \eta \in M\} \subset V$$

- $T_{F_{M;\xi,\eta_1}}\zeta + T_{F_{M;\xi,\eta_2}}\zeta = T_{F_{M;\xi,\eta_1+\eta_2}}\zeta \ \forall \eta_1, \eta_2 \in M$.
- $\lambda T_{F_{M;\xi,\eta}}\zeta = T_{F_{M;\xi,\lambda\eta}}\zeta \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ y $\eta \in M$.
- $$\begin{aligned} a \cdot T_{F_{M;\xi,\eta}}\zeta &= \int_G \langle \eta, g \cdot \xi \rangle a g \cdot \zeta \, dg \overset{(s=ag)}{=} \int_G \langle \eta, a^{-1} s \cdot \xi \rangle s \cdot \zeta \, ds \\ &= \int_G \langle a \cdot \eta, s \cdot \xi \rangle s \cdot \zeta \, ds = T_{F_{M;\xi,a\cdot\eta}}\zeta \end{aligned}$$
- $W \cong M$, en particular $dim(W) < \infty$.

Así, para cualquier $\eta \in M$, $T_{F_{M;\xi,\eta}}\zeta \in V^{fin}$.

Sea $W = \bigcap_{i=1}^{m} \{\xi \in V : p_i(\xi) < \varepsilon_i\}$ una vecindad de $0 \in V$, donde $p_1, \ldots, p_m$ son seminormas. Dado $\xi \in V$, existe una vecindad $1 \in U$ tal que $g \cdot \xi - \xi \in W \ \forall g \in U$.
Sea $\delta \in C(G)$ una función chipote tal que $\delta(U^c) = \{0\}$ y $\int_G \delta = 1$, entonces para todo i

$$p_i(T_\delta \xi - \xi) = p_i\left(\int_G \delta(g)(g \cdot \xi - \xi) dg\right) \leq \int_G \delta(g) p_i(g \cdot \xi - \xi) dg \leq \varepsilon_i$$

i.e. $T_\delta \xi - \xi \in W$.
Como la integración $\mathcal{I} : C(G; V) \longrightarrow V$ es continua, existe una vecindad W' de $g \longmapsto \delta(g) g \cdot \xi$ tal que $\mathcal{I}(W') \subset W + \xi$.

$$\tau : C(G) \times C(G; V) \longrightarrow C(G; V), \quad \tau(f, \psi) = f\psi$$

Así $\tau(\delta, R_\xi) \in W'$. Por continuidad, existe $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset C(G) \times C(G; V)$ vecindad de (δ, R_ξ) tal que $\tau(\Omega_1 \times \Omega_2) \subset W'$. Luego $\varphi \in \Omega_1$ para alguna $\varphi \in C_{alg}(G)$, de manera que $\tau(\varphi, R_\xi) \in W'$

$$\Longrightarrow \int_G \varphi(g) g \cdot \xi \, dg = \mathcal{I}(\tau(\varphi, \xi)) \in W + \xi$$

$\therefore T_\varphi \xi - \xi \in W$ y $V^{fin} \cap (W + \xi) \neq \emptyset$. $\square$

Corolario

Todas las representaciones irreducibles de G tienen dimensión finita.

Demostración.

Sea V una representación irreducible. Sabemos que

$$V = \overline{V^{fin}}$$

Fijemos $0 \neq \xi \in V^{fin}$. Entonces existe $W < V$ G-invariante de dimensión finita tal que $0 \neq \xi \in W$. Por irreducibilildad se sigue que $W = V$. En particular $dim(V) < \infty$. $\square$

Corolario

Todas las representaciones irreducibles de G tienen dimensión finita.

Demostración.

Sea V una representación irreducible. Sabemos que

$$V = \overline{V^{fin}}$$

Fijemos $0 \neq \xi \in V^{fin}$. Entonces existe $W < V$ G-invariante de dimensión finita tal que $0 \neq \xi \in W$. Por irreducibilildad se sigue que $W = V$. En particular $dim(V) < \infty$. □

Corolario

Supongamos que todas las representaciones irreducibles de G tienen dimensión 1, entonces G es abeliano.

Demostración.

Sea $\varphi : G \hookrightarrow GL(V)$ una rep. irreducible, entonces $dim(V) = 1$. Así $GL(V) = \mathbb{C}^{\times}$ es abeliano, luego $\varphi_{xyx^{-1}y^{-1}} = I \ \forall x, y \in G$. Por lo tanto G es abeliano. □

La estructura de $C_{alg}(G)$

Teorema

1. *Hay un isomorfismo de representaciones de $G \times G$:*

$$\begin{aligned} \phi : \bigoplus_P \overline{P} \otimes P &\longrightarrow C_{alg}(G) \\ \eta \otimes \xi &\longmapsto F_{P;\xi,\eta} \end{aligned} \tag{1}$$

   donde P varía en las representaciones unitarias irreducibles de G.

2. *$\overline{P} \otimes P$ es una representación irreducible de $G \times G$.*
3. *El isomorfismo* (1) *preserva productos internos, con*

$$\langle \eta_1 \otimes \xi_1, \eta_2 \otimes \xi_2 \rangle := \frac{1}{dim(P)} \overline{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$$

Demostración.

1. Si $G \curvearrowright C(G)$ por traslación izquierda, $C(G)^{fin} = C_{alg}(G)$. Así

$$\bigoplus_P P \otimes Hom_G(P; C(G)) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_P C(G)_P = C_{alg}(G), \quad \xi \otimes f \longmapsto f(\xi)$$

Por otra parte, consideremos

$$\begin{aligned} F : \overline{P} &\longrightarrow Hom_G(P; C(G)) \\ \xi &\longmapsto F_\xi \end{aligned}, \qquad F_\xi(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \xi \rangle$$

- $g \cdot F_\xi(\eta)(a) = \langle \eta, g^{-1} a \cdot \xi \rangle = \langle g \cdot \eta, a \cdot \xi \rangle = F_\xi(g \cdot \eta)(a).$

Demostración.

1. Si $G \curvearrowright C(G)$ por traslación izquierda, $C(G)^{fin} = C_{alg}(G)$. Así

$$\bigoplus_P P \otimes Hom_G(P; C(G)) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_P C(G)_P = C_{alg}(G), \quad \xi \otimes f \longmapsto f(\xi)$$

Por otra parte, consideremos

$$\begin{aligned} F : \overline{P} &\longrightarrow Hom_G(P; C(G)) \\ \xi &\longmapsto F_\xi \end{aligned}, \qquad F_\xi(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \xi \rangle$$

- $g \cdot F_\xi(\eta)(a) = \langle \eta, g^{-1} a \cdot \xi \rangle = \langle g \cdot \eta, a \cdot \xi \rangle = F_\xi(g \cdot \eta)(a)$.
- $F_{\overline{\lambda}\xi}(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \overline{\lambda}\xi \rangle = \lambda \langle \eta, g \cdot \xi \rangle = \lambda F_\xi(\eta)(g)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración.

1. Si $G \curvearrowright C(G)$ por traslación izquierda, $C(G)^{fin} = C_{alg}(G)$. Así

$$\bigoplus_P P \otimes Hom_G(P; C(G)) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_P C(G)_P = C_{alg}(G), \quad \xi \otimes f \longmapsto f(\xi)$$

Por otra parte, consideremos

$$\begin{array}{rl} F : \overline{P} \longrightarrow & Hom_G(P; C(G)) \\ \xi \longmapsto & F_\xi \end{array}, \qquad F_\xi(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \xi \rangle$$

- $g \cdot F_\xi(\eta)(a) = \langle \eta, g^{-1} a \cdot \xi \rangle = \langle g \cdot \eta, a \cdot \xi \rangle = F_\xi(g \cdot \eta)(a)$.
- $F_{\overline{\lambda}\xi}(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \overline{\lambda}\xi \rangle = \lambda \langle \eta, g \cdot \xi \rangle = \lambda F_\xi(\eta)(g) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- $F_\xi = 0 \Longrightarrow ||\xi||^2 = F_\xi(\xi)(1) = 0 \Longrightarrow \xi = 0$.
- Sea $f \in Hom_G(P; C(G))$, entonces $\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \eta & \longmapsto & f(\eta)(1) \end{array} \in P^*$, luego $\exists\, \xi \in P$ tal que $f(\eta)(1) = \langle \eta, \xi \rangle \ \forall \eta \in P$. Así

  $$F_\xi(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \xi \rangle = \langle g^{-1} \cdot \eta, \xi \rangle = f(g^{-1} \cdot \eta)(1) = g^{-1} \cdot f(\eta)(1) = f(\eta)(g)$$

Demostración.

1. Si $G \curvearrowright C(G)$ por traslación izquierda, $C(G)^{fin} = C_{alg}(G)$. Así

$$\bigoplus_P P \otimes Hom_G(P; C(G)) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_P C(G)_P = C_{alg}(G), \quad \xi \otimes f \longmapsto f(\xi)$$

Por otra parte, consideremos

$$\begin{aligned} F : \overline{P} &\longrightarrow Hom_G(P; C(G)) \\ \xi &\longmapsto F_\xi \end{aligned}, \qquad F_\xi(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \xi \rangle$$

- $g \cdot F_\xi(\eta)(a) = \langle \eta, g^{-1} a \cdot \xi \rangle = \langle g \cdot \eta, a \cdot \xi \rangle = F_\xi(g \cdot \eta)(a)$.
- $F_{\overline{\lambda}\xi}(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \overline{\lambda}\xi \rangle = \lambda \langle \eta, g \cdot \xi \rangle = \lambda F_\xi(\eta)(g) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- $F_\xi = 0 \Longrightarrow ||\xi||^2 = F_\xi(\xi)(1) = 0 \Longrightarrow \xi = 0$.
- Sea $f \in Hom_G(P; C(G))$, entonces $\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \eta & \longmapsto & f(\eta)(1) \end{array} \in P^*$,

  luego $\exists\, \xi \in P$ tal que $f(\eta)(1) = \langle \eta, \xi \rangle \ \forall \eta \in P$. Así

  $$F_\xi(\eta)(g) = \langle \eta, g \cdot \xi \rangle = \langle g^{-1} \cdot \eta, \xi \rangle = f(g^{-1} \cdot \eta)(1) = g^{-1} \cdot f(\eta)(1) = f(\eta)(g)$$

- F es equivariante c.r. a la acción derecha de G sobre $C(G)$.

1.

$$\begin{tikzcd} \bigoplus P \otimes \overline{P} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d, "\cong"'] & & \bigoplus C(G)_P = C_{alg}(G) \\ \bigoplus P \otimes Hom_G(P; C(G)) \arrow[urr, "\cong"'] & & \end{tikzcd}$$

Como $\eta \otimes \xi \longmapsto \eta \otimes F_\xi \longmapsto F_\xi(\eta) = F_{P;\xi,\eta}$, el diagrama conmuta.

1.
$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus P \otimes \overline{P} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d, "\cong"'] & & \bigoplus C(G)_P = C_{alg}(G) \\
\bigoplus P \otimes Hom_G(P; C(G)) \arrow[urr, "\cong"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Como $\eta \otimes \xi \longmapsto \eta \otimes F_\xi \longmapsto F_\xi(\eta) = F_{P;\xi,\eta}$, el diagrama conmuta.

2. Notemos que $End(P_1 \otimes P_2) \cong End(P_1) \otimes End(P_2)$, luego

$$End(P_1 \otimes P_2)^{G\times G} \cong (End(P_1) \otimes End(P_2))^{G\times G}$$

donde
$$V^G := \{\xi \in V : g \cdot \xi = \xi \quad \forall g \in G\}.$$

Pero
$$End(P_1 \otimes P_2)^{G\times G} = End_{G\times G}(P_1 \otimes P_2)$$

y
$$(End(P_1) \otimes End(P_2))^{G\times G} = End(P_1)^G \otimes End(P_2)^G.$$

2. Luego

$$End_{G\times G}(P_1 \otimes P_2) \cong End_G(P_1) \otimes End_G(P_2) = \mathbb{C}I_{P_1} \otimes \mathbb{C}I_{P_2} \cong \mathbb{C}$$

Sea $P_1 \otimes P_2 \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{n_i}$, donde $n_i \in \mathbb{N}$ y V_i son irreducibles tales que $V_i \ncong V_j$ si $i \neq j$. Entonces

$$\begin{aligned} End_{G\times G}(P_1 \otimes P_2) &= Hom_{G\times G}\left(\bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{n_i}, \bigoplus_{j=1}^{k} V_j^{n_j}\right) \\ &\cong \bigoplus_{i,j} Hom_{G\times G}(V_i, V_j)^{n_i n_j} \\ &= \bigoplus_{i=1}^{k} End_{G\times G}(V_i)^{n_i^2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 1 = dim(End_{G\times G}(P_1 \otimes P_2)) = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \; dim(End_{G\times G}(V_i)) = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$$

Así $\exists\, j$ tal que $n_j = 1$ y $n_i = 0$ $\forall i \neq j$. Por lo tanto $P_1 \otimes P_2 \cong V_j$.

3. Hay solamente un producto interno $(G \times G)$-invariante sobre cada $\overline{P} \otimes P$. Por tanto existe $K_P > 0$ tal que

$$\langle F_{P;\eta_1,\xi_1}, F_{P;\eta_2,\xi_2} \rangle = K_P \overline{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \tag{2}$$

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal para P. Entonces

$$F_{P;e_i,e_j}(g) = M_{ij}(g),$$

donde $M_{ij}(g)$ es la matriz unitaria representando la acción de g en P. Por (2) obtenemos $\int_G \overline{M_{ij}(g)} M_{kl}(g) dg = K_P \delta_{ik} \delta_{jl}$.
Como $\overline{M_{ij}(g)} = M_{ji}(g^{-1})$ se sigue que

$$\sum_{i=1}^n \int_G \overline{M_{ij}(g)} M_{ij}(g) dg = \int_G \sum_{i=1}^n M_{ji}(g^{-1}) M_{ij}(g) dg = \int_G dg = 1$$

y $\sum_{i=1}^n K_P \delta_{jj} = K_P dim(P) \Longrightarrow K_P = \dfrac{1}{dim(P)}$. $\square$

Corolario

$$C(G/H) \cong \widehat{\bigoplus_P} P \otimes \overline{P}^H$$

Demostración.

Consideremos el mapeo

$$\begin{aligned} \overline{P}^H &\longrightarrow Hom_G(P; C(G/H)) \\ \xi &\longmapsto F_\xi \end{aligned}, \qquad F_\xi(\eta)(gH) = \langle \eta, g \cdot \xi \rangle$$

- $aH = gH \Longrightarrow g^{-1}a \in H \Longrightarrow g^{-1}a \cdot \xi = \xi \Longrightarrow a \cdot \xi = g \cdot \xi$.
- Sea $f \in Hom_G(P; C(G/H))$, entonces existe $\xi \in \overline{P}$ tal que $f(\eta)(H) = \langle \eta, \xi \rangle$ $\forall \eta \in P$. Más aún, dado $h \in H$ y $\eta \in P$

  $$\langle \eta, h \cdot \xi \rangle = f(\eta)(hH) = f(\eta)(H) = \langle \eta, \xi \rangle$$

  $\Longrightarrow \xi \in \overline{P}^H$. Además $F_\xi = f$.

El resto se sigue como antes. $\square$

Ejemplo

Recordemos que $\mathbb{S}^{n-1} \approx O(n)/O(n-1)$. *Así*

$$C(\mathbb{S}^{n-1}) \cong C(O(n)/O(n-1)) \cong \widehat{\bigoplus_P} P \otimes \overline{P}^{O(n-1)}$$

Observación

Cualquier $f \in C_{alg}(G)$ *puede ser expandida como una suma finita*

$$f = \sum f_P$$

donde f_P *está en la imagen de* $\overline{P} \otimes P$ *y además*

$$||f||_2^2 = ||\sum f_P||^2 = \sum \frac{1}{dim(P)} ||f_P||^2,$$

donde $||f||_2$ *es la norma* L^2 *y* $||f_P||$ *la norma natural sobre* $\overline{P} \otimes P$.

$$L^2(G) = \overline{C_{alg}(G)}^{||\cdot||_2} \longleftrightarrow \left\{ \{f_P\} : \sum \frac{1}{dim(P)} ||f_P||^2 < \infty \right\}$$

Caracteres

Corolario

1. *Sean* $\varphi : G \longrightarrow GL(P)$ *y* $\rho : G \longrightarrow GL(Q)$ *representaciones irreducibles. Entonces*

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, & \varphi \sim \rho, \\ 0, & \varphi \not\sim \rho. \end{cases}$$

2. *Una representación de dimensión finita está determinada salvo isomorfismo por su caracter.*
3. $\varphi : G \longrightarrow GL(P)$ *es irreducible* $\Longleftrightarrow \langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle = 1$.
4. *Los caracteres de las representaciones irreducibles generan un subespacio denso de las funciones de clase sobre* G, *i.e. las funciones continuas* f *tales que* $f(xyx^{-1}) = f(y)$.

Demostración.

1. Supongamos que $\varphi \sim \rho$, entonces existe $T : P \xrightarrow{\cong} Q$ tal que $T\varphi_g T^{-1} = \rho_g \ \forall g \in G$. Así

$$Tr(\rho_g) = Tr(T\varphi_g T^{-1}) = Tr(TT^{-1}\varphi_g) = Tr(\varphi_g)$$

Por otro lado, sea $\beta = \{e_i\}_{i=1}^n$ una base o.n. para P. Se tiene

$$[\varphi_g]_\beta = \begin{pmatrix} \langle e_1, \varphi_g(e_1)\rangle & \cdots & \langle e_1, \varphi_g(e_n)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, \varphi_g(e_1)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi_g(e_n)\rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \langle \chi_\varphi, \chi_\rho\rangle = \int_G |Tr(\varphi_g)|^2 dg &= \int_G \sum_{i,j} F_{P;e_i,e_i}(g)\overline{F_{P;e_j,e_j}(g)}dg \\ &= \sum_{i,j}\int_G F_{P;e_i,e_i}(g)\overline{F_{P;e_j,e_j}(g)}dg = \sum_{i,j}\langle F_{P;e_i,e_i}, F_{P;e_j,e_j}\rangle \\ &= \sum_{i,j}\langle e_i \otimes e_i, e_j \otimes e_j\rangle = \sum_{i,j}\frac{1}{n}|\langle e_i, e_j\rangle|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

1. Supongamos que $\varphi \not\sim \rho$. Si $\{v_i\}_{i=1}^m$ es una base o.n. de Q, entonces

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\rho \rangle = \int_G \sum_{i,j} F_{P;e_i,e_i}(g)\overline{F_{Q;v_j,v_j}(g)}dg = \sum_{i,j} \int_G F_{P;e_i,e_i}(g)\overline{F_{Q;v_j,v_j}(g)}dg$$

Para i, j fijos, definimos

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\theta} & Hom(\overline{Q}, \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & \left(y \mapsto \int_G \langle x, \varphi_g(e_i)\rangle \overline{\langle y, \rho_g(v_j)\rangle} dg\right) \end{array}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \theta(x)(\rho_{h^{-1}}(y)) &= \int_G \langle x, \varphi_g(e_i)\rangle \overline{\langle \rho_{h^{-1}}(y), \rho_g(v_j)\rangle} dg \\ &= \int_G \langle x, \varphi_g(e_i)\rangle \overline{\langle y, \rho_{hg}(v_j)\rangle} dg \\ &\overset{(a=hg)}{=} \int_G \langle x, \varphi_{h^{-1}a}(e_i)\rangle \overline{\langle y, \rho_a(v_j)\rangle} da \\ &= \int_G \langle \varphi_h(x), \varphi_a(e_i)\rangle \overline{\langle y, \rho_a(v_j)\rangle} da = \theta(\varphi_h(x))(y) \end{aligned}$$

Así θ es equivariante. Como $P \ncong Hom(\overline{Q}, \mathbb{C})$ se sigue que $\theta = 0$.

2. Sea $\varphi \sim n_1\varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus n_s\varphi^{(s)}$, entonces

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(n_1\varphi_g^{(1)} + \ldots + n_s\varphi_g^{(s)}) = \sum_i n_i \chi_{\varphi^{(i)}}(g).$$

Luego

$$\langle \chi_\varphi, \chi_{\varphi^{(j)}} \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_{\varphi^{(i)}}, \chi_{\varphi^{(j)}} \rangle = n_j$$

$\therefore \varphi \sim \langle \chi_\varphi, \chi_{\varphi^{(1)}} \rangle \varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \langle \chi_\varphi, \chi_{\varphi^{(s)}} \rangle \varphi^{(s)}$.

2. Sea $\varphi \sim n_1\varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus n_s\varphi^{(s)}$, entonces

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(n_1\varphi_g^{(1)} + \ldots + n_s\varphi_g^{(s)}) = \sum_i n_i\chi_{\varphi^{(i)}}(g).$$

Luego

$$\langle \chi_\varphi, \chi_{\varphi^{(j)}} \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_{\varphi^{(i)}}, \chi_{\varphi^{(j)}} \rangle = n_j$$

$\therefore \varphi \sim \langle \chi_\varphi, \chi_{\varphi^{(1)}} \rangle \varphi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \langle \chi_\varphi, \chi_{\varphi^{(s)}} \rangle \varphi^{(s)}$.

3.

$$||\chi_\varphi||^2 = \left\|\sum_i n_i\chi_{\varphi_i}\right\|^2 = \sum_i n_i^2||\chi_{\varphi_i}||^2 = \sum_i n_i^2$$

Así $\langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle = 1 \iff \exists\, j$ tal que $n_j = 1$ y $n_i = 0\ \forall i \neq j$.

4. Consideremos

$$L : \overline{P} \otimes P \xrightarrow{\cong} Hom(P; P)$$
$$x \otimes y \longmapsto (p \mapsto \langle p, x \rangle y)$$

$$\therefore L((\overline{P} \otimes P)^G) = (L(\overline{P} \otimes P))^G = Hom(P; P)^G = Hom_G(P; P) = \mathbb{C} I_P$$

Además

$$L\left(\sum_j e_j^{(P)} \otimes e_j^{(P)}\right)(p) = \sum_i \langle p, e_j^{(P)} \rangle e_j^{(P)} = p \quad \forall p \in P,$$

donde $\{e_j^{(P)}\}_j$ es base o.n. de P. Así $(\overline{P} \otimes P)^G = \mathbb{C} \cdot \sum_j e_j^{(P)} \otimes e_j^{(P)}$.

Recordemos $\phi : \bigoplus \overline{P} \otimes P \longrightarrow C_{alg}(G)$ está dada por $\phi(\eta \otimes \xi) = F_{P;\xi,\eta}$.

Sea $t \in \left(\bigoplus \overline{P} \otimes P\right)^G$. Dados $x, g \in G$ tenemos

$$\phi(t)(x) = \phi((g, g) \cdot t)(x) = (g, g) \cdot \phi(t)(x) = \phi(t)(gxg^{-1})$$

Por lo tanto $\phi(t)$ es una función de clase.

Recíprocamente, si $\phi(t)$ es una función de clase, entonces

$$\phi(t)(x) = \phi(t)(gxg^{-1}) = (g,g)\cdot\phi(t)(x) = \phi((g,g)\cdot t)(x)\ \forall x, g \in G$$

$\Longrightarrow t = (g,g)\cdot t$, es decir, $t \in \left(\bigoplus \overline{P} \otimes P\right)^G$.

$$\begin{aligned}
\therefore \{\textit{Funciones de clase en } C_{alg}(G)\} &= \phi\left(\bigoplus_P (\overline{P}\otimes P)^G\right) \\
&= \phi\left(\bigoplus_P \mathbb{C}\cdot\sum_j e_j^{(P)} \otimes e_j^{(P)}\right) \\
&= \left\langle \phi\left(\sum_j e_j^{(P)} \otimes e_j^{(P)}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_j F_{P;e_j^{(P)},e_j^{(P)}} \right\rangle \\
&= \langle \chi_P \rangle
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo

Como $\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *es abeliano, las únicas representaciones irreducibles de* $\mathbb{S}^1$ *tienen dimensión 1.*
Sea $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ *una representación irreducible. Entonces* $\varphi_{[x]}(\omega) = f([x])\omega$ *para alguna función lineal continua* $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, dashed, "\exists!\, \tilde{f}"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "exp"] \\
\mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Existe una función continua $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f([x]) = e^{2\pi i \tilde{f}(x)}\ \forall x \in \mathbb{R}$ *y* $\tilde{f}(0) = 0$*. Así* $\tilde{f}$ *es lineal, de modo que* $\tilde{f}(x) = cx$ *para alguna* $c \in \mathbb{R}$*.*
En particular

$$1 = f([1]) = e^{2\pi i \tilde{f}(1)} = e^{2\pi i c} \Longrightarrow c \in \mathbb{Z}$$

$\therefore \chi_\varphi([x]) = \varphi_{[x]} = e^{2\pi i c x}\ \forall x \in \mathbb{R}.$
$\therefore C(\mathbb{S}^1) = \overline{\langle \chi_P \rangle} = \overline{\{\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi i k} : n \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{C}\}}^{||\cdot||_\infty}.$

Observación

El ejemplo anterior muestra que hay tantas representaciones irreducibles de $\mathbb{S}^1$ *como números enteros.*

Bibliografía

1. T. Bröcker and T. tom Dieck, Representations of Compact Lie Groups, LNM 98, Springer-Verlag, 1985.
2. R. Carter, I. MacDonald and G. Segal, Lectures on Lie Groups and Lie Algebras, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995.
3. G. B. Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRC Press, 2000.
4. E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications. New York, 1978.
5. W. Rudin, Functional Analysis (2nd edition), McGraw Hill, Inc., New York, 1991.
6. S. Sternberg, Group theory and physics, Cambridge University Press, 1994.