Álgebras de von Neumann

Representaciones

Definición

Sea G un grupo topológico. Una representación de G en un espacio vectorial V localmente convexo y completo, es un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g, x) & \longmapsto & \varphi_g(x) = g \cdot x \end{array}$$

es continua.

Observación

Toda representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ de un grupo compacto G tiene un producto interno G-invariante.

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle := \int_G \langle g \cdot x, g \cdot y \rangle dg$$

$$\langle\langle \varphi_h(x), \varphi_h(y) \rangle\rangle = \int_G \langle gh \cdot x, gh \cdot y \rangle dg = \int_G \langle a \cdot x, a \cdot y \rangle da = \langle\langle x, y \rangle\rangle$$

Ejemplos

1. $$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & GL(\mathbb{R}^2) \\ e^{it} & \longmapsto & \begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

2. **Representación regular derecha**

$$\begin{array}{c} R : G \longrightarrow GL(C(G)) \\ z \longmapsto R_z \end{array}, \quad R_z : \begin{array}{ccc} C(G) & \longrightarrow & C(G) \\ f & \longmapsto & (w \mapsto f(wz)) \end{array}$$

3. **Representación regular izquierda**

$$\begin{array}{c} L : G \longrightarrow GL(C(G)) \\ z \longmapsto L_z \end{array}, \quad L_z : \begin{array}{ccc} C(G) & \longrightarrow & C(G) \\ f & \longmapsto & (w \mapsto f(z^{-1}w)) \end{array}$$

4. **Suma directa**

$$\varphi \oplus \rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(V \oplus W) \\ g & \longmapsto & ((v, w) \mapsto (\varphi_g(v), \rho_g(w)) \end{array}$$

Definición

Sean $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representaciones

- *Un subespacio $U < V$ es G-invariante si $\varphi_g(U) \subseteq U$ para todo $g \in G$.*
- *Una representación $V \neq 0$ es irreducible si V no tiene subespacios cerrados G-invariantes, excepto 0 y V.*
- *φ y ρ son equivalentes si*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"', "\cong"] & V \arrow[d, "\cong"', "T"] \\ W \arrow[r, "\rho_g"'] & W \end{tikzcd}$$

Es decir, $T(\varphi_g(x)) = \rho_g(Tx)$ para todo $g \in G$ y $x \in V$. Escribimos $\varphi \sim \rho$ o $V \cong W$.

Proposición

Sea V una representación de un grupo compacto G y sea W un subespacio G-invariante. Entonces $W^\perp$ es un subespacio G-invariante.

Demostración.

Sea $x \in W^\perp$, $y \in W$ y $g \in G$, entonces

$$\langle g \cdot x, y \rangle = \langle x, g^{-1} \cdot y \rangle = 0$$

$V = W \oplus W^\perp$. □

Corolario

Sea G un grupo compacto y sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una rep. de dimensión finita. Entonces existen representaciones irreducibles $V_1, \ldots, V_k$ tales que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

Ejemplo

La representación $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^2)$, $t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *no tiene productos internos* $\mathbb{R}$*-invariantes.*

$$\begin{aligned} \langle (0,1),(1,0)\rangle &= \langle \varphi_1(0,1), \varphi_1(1,0)\rangle \\ &= \langle (1,1),(1,0)\rangle \\ &= \langle (0,1),(1,0)\rangle + \langle (1,0),(1,0)\rangle \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow ||(1,0)||^2 = 0 \Longrightarrow (1,0) = \mathbf{0} \;!!$$

Notemos que $\varphi_t(\mathbb{R}\cdot e_1) \subseteq \mathbb{R}\cdot e_1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
Sea $0 \neq V < \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$*-invariante tal que* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\cdot e_1 \oplus V$, *entonces* $V = \mathbb{R}\cdot (x,y)$ *para algún* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Así*

$$\varphi_1(x,y) = (x+y,y) = \lambda(x,y) \Longrightarrow y = 0$$

$\therefore V = \mathbb{R}\cdot e_1$

Motivación

Sea H un espacio de Hilbert y G grupo localmente compacto.

$$\alpha : G \longrightarrow GL(H)$$

una representación unitaria.

$$H \cong \bigoplus_{i \in I} V_i ?$$

Supongamos que existe $W < H$ un subespacio G-invariante cerrado, entonces $H = W \oplus W^{\perp}$. Entonces la proyección

$$P_W : H \longrightarrow W, \qquad x + y \longmapsto x$$

es equivariante y satisface $P_W^* = P_W = P_W^2$.
Recíprocamente, si $P : H \longrightarrow H$ es una proyección equivariante, la imagen $P(H) \subset H$ es un subespacio G-invariante cerrado.

Determinar todas las proyecciones equivariantes $P : H \longrightarrow H$

Operadores acotados

Sea H un espacio de Hilbert, denotamos por $B(H)$ el álgebra de operadores acotados en H. Para $T \in B(H)$, definimos $||T|| = \sup\{||Tx|| : ||x|| \leq 1\}$ y el adjunto de $T^* : H \longrightarrow H$, caracterizado por

$$\langle v, T^* w\rangle = \langle Tv, w\rangle$$

Ejemplo

Sea (X, μ) un espacio compacto y $f \in L^\infty(X)$. Consideremos el operador $M_f(h) = fh$ para $h \in L^2(X)$.

$$||M_f(h)||^2 = \int_X |f(x)h(x)|^2 d\mu \leq ||f||_\infty^2 \int_X |h(x)|^2 d\mu \Longrightarrow ||M_f|| \leq ||f||_\infty$$

Supongamos que $||M_f|| < ||f||_\infty$, entonces $||f||_\infty - \varepsilon > ||M_f||$ para algún $\varepsilon > 0$, luego $\exists\ Y \subseteq X$ tal que $\mu(Y) > 0$ y $|f(x)| > ||M_f|| + \varepsilon\ \forall x \in Y$.

$$\Longrightarrow ||M_f||^2 \mu(Y) \geq ||M_f(\chi_Y)||^2 = \int_X |f(x)\chi_Y(x)|^2 d\mu$$

$$\geq \int_X (||M_f|| + \varepsilon)^2 \chi_Y(x) d\mu = (||M_f|| + \varepsilon)^2 \mu(Y) \quad !!$$

Proposición

Sean $T, L \in B(H)$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Entonces*

1. $(L+T)^* = L^* + T^*$
2. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
3. $(T^*)^* = T$
4. $||T^*T|| = ||TT^*|| = ||T||^2$
5. $(TL)^* = L^*T^*$

Definición

Dado $S \subseteq B(H)$*, definimos el* **conmutante** *de* S *como*

$$S' := \{T \in B(H) : TL = LT \ \forall L \in S\}$$

Observación

1. *S' es una subálgebra de $B(H)$:*
   Sean $T_1, T_2 \in S'$ y $L \in S$, entonces
   - $(T_1 + T_2)L = T_1 L + T_2 L = LT_1 + LT_2 = L(T_1 + T_2)$.
   - $(T_1 T_2)L = (T_1 L)T_2 = L(T_1 T_2)$.
2. *Si S es estable bajo la operación $T \mapsto T^*$, entonces S' también lo es.*
   En efecto, dados $T \in S'$ y $L \in S$, tenemos
   $$T^* L = (L^* T)^* = (TL^*)^* = LT^*$$
   $\therefore\ T^* \in S'$.

Observación

1. *S' es una subálgebra de $B(H)$:*
   Sean $T_1, T_2 \in S'$ y $L \in S$, entonces
   - $(T_1 + T_2)L = T_1L + T_2L = LT_1 + LT_2 = L(T_1 + T_2)$.
   - $(T_1T_2)L = (T_1L)T_2 = L(T_1T_2)$.
2. *Si S es estable bajo la operación $T \mapsto T^*$, entonces S' también lo es.*
   En efecto, dados $T \in S'$ y $L \in S$, tenemos
   $$T^*L = (L^*T)^* = (TL^*)^* = LT^*$$
   $\therefore T^* \in S'$.

Dada una representación unitaria

$$\alpha : G \longrightarrow GL(H) \subset B(H)$$

Determinar las proyecciones que pertenecen al conmutante

$$\alpha(G)' = \{T \in B(H) : T\alpha_g = \alpha_g T \ \forall g \in G\}$$

Topologías

Definición

- *La* **topología fuerte** *sobre* $B(H)$ *es la topología localmente convexa generada por las seminormas* $|| \; ||_x \; \forall x \in H$, *donde*

$$||T||_x := ||Tx||, \qquad T \in B(H).$$

$$T_n \longrightarrow T \Longleftrightarrow ||T_n x - Tx|| \longrightarrow 0 \quad \forall x \in H.$$

- *La* **topología débil** *sobre* $B(H)$ *es la topología localmente convexa generada por las seminormas* $|| \; ||_{x,y}$ *para* $x, y \in H$, *donde*

$$||T||_{x,y} := |\langle Tx, y\rangle|, \qquad T \in B(H).$$

$$T_n \xrightarrow{w} T \Longleftrightarrow \langle T_n x, y\rangle \longrightarrow \langle Tx, y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Observación

La convergencia fuerte implica la convergencia débil:
Sea $T_n \longrightarrow T$ *y* $x, y \in H$, *entonces*

$$|\langle T_n x, y\rangle - \langle Tx, y\rangle| = |\langle (T_n - T)x, y\rangle| \leq ||T_n - T||\, ||x||\, ||y|| \longrightarrow 0$$

La topología débil es estrictamente más débil que la topología fuerte:
Sea $n \in \mathbb{N}$, *definimos*

$$T_n : L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1), \qquad T_n f(t) := e^{int} f(t)$$

Notemos que

$$\langle T_n f, g\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} T_n f(z)\overline{g(t)}dt = \int_{\mathbb{S}^1} e^{int} f(t)\overline{g(t)}dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por otro lado

$$||T_n f||^2 = \int_{\mathbb{S}^1} |e^{int} f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{S}^1} |f(t)|^2 = ||f||^2$$

Así $||T_n|| = 1 \not\longrightarrow 0$.

El teorema del doble conmutante

Teorema (von Neumann)

Sea H un espacio de Hilbert y $A \subseteq B(H)$ una subálgebra-$*$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *Existe $S \subseteq B(H)$ tal que $A = S'$.*
2. *Tenemos $A = A''$.*
3. *El álgebra A es cerrada en la topología fuerte sobre $B(H)$.*
4. *El álgebra A es cerrada en la topología débil sobre $B(H)$.*

El teorema del doble conmutante

Teorema (von Neumann)

Sea H un espacio de Hilbert y $A \subseteq B(H)$ una subálgebra-$*$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *Existe $S \subseteq B(H)$ tal que $A = S'$.*
2. *Tenemos $A = A''$.*
3. *El álgebra A es cerrada en la topología fuerte sobre $B(H)$.*
4. *El álgebra A es cerrada en la topología débil sobre $B(H)$.*

Demostración.

1. $\Longrightarrow$ 2.

Si $A = S'$, entonces $S \subseteq S'' = A'$ de donde $A'' \subseteq S' = A$. $\square$

Definición

Un **álgebra de von Neumann** *es una subálgebra-$*$ $A \subseteq B(H)$ satisfaciendo alguna de las condiciones del teorema.*

Ejemplo

Si (X, μ) *es loc. compacto,* $L^\infty(X)$ *es un álgebra de von Neumann.*

Ejemplo

Si (X,μ) es loc. compacto, $L^\infty(X)$ es un álgebra de von Neumann.

Proposición

Sea $A \subseteq B(H)$ una subálgebra estable bajo la operación $T \mapsto T^*$. Entonces el conmutante $A' \subseteq B(H)$ es un álgebra de von Neumann.

Demostración.

Sea $\{T_n\}_n \subseteq A'$ tal que $T_n \xrightarrow{w} T$. Entonces para $L \in A$ y $x, y \in H$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle (TL - LT)x, y\rangle =& \langle TLx, y\rangle - \langle LTx, y\rangle \\ =& \langle TLx, y\rangle - \langle Tx, L^* y\rangle \\ =& \lim_n (\langle T_n Lx, y\rangle - \langle T_n x, L^* y\rangle) \\ =& \lim_n \langle (T_n L - LT_n)x, y\rangle = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $TL = LT$ i.e. $T \in S'$. □

Ejemplo

Sea $\alpha : G \longrightarrow GL(H) \subset B(H)$ una representación unitaria. Entonces $\alpha(G)' \subseteq B(H)$ y $\alpha(G)'' \subseteq B(H)$ son álgebras de von Neumann, pues $\alpha_g^* = \alpha_{g^{-1}} \in \alpha(G)$ para todo $g \in G$.

Álgebra de grupo

Definición

Sea $\alpha : G \longrightarrow GL(H) \subset B(H)$ *una representación unitaria. El* **álgebra de grupo de von Neumann** *de* α *es* $\alpha(G)''$.

Observación

$\alpha(G)''$ *es el álgebra de von Neumann más pequeña conteniendo a* $\alpha(G) \subseteq B(H)$.

Si A *es un álgebra de von Neumann tal que* $\alpha(G) \subseteq A$*, entonces* $A' \subseteq \alpha(G)'$ *y así* $\alpha(G)'' \subseteq A'' = A$.

Ejemplo

Sea G *un grupo localmente compacto. Consideremos la representación regular izquierda*

$$L : G \longrightarrow B(L^2(G)), \qquad \begin{array}{rccc} L_g : & L^2(G) & \longrightarrow & L^2(G) \\ & f & \longmapsto & (x \mapsto f(g^{-1}x)) \end{array}$$

El álgebra de grupo de von Neumann $L(G)'' \subset B(L^2(G))$ *se conoce como el* **álgebra de grupo de von Neumann** *de* G.

Ejemplo

Si G es un grupo finito, el álgebra de grupo de von Neumann de G es semisimple y tiene dimensión finita

$$L(G)'' = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$$

Ejemplo

Si G es un grupo finito, el álgebra de grupo de von Neumann de G es semisimple y tiene dimensión finita

$$L(G)'' = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$$

Ejemplo

Sea (X, μ) un espacio localmente compacto.

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(X) & \hookrightarrow & B(L^2(X)) \\ f & \mapsto & (h \xmapsto{M_f} fh) \end{array}$$

Teorema

Cada álgebra de von Neumann conmutativa actuando en un espacio de Hilbert separable H es isomorfa a $L^\infty(X)$, donde (X, μ) es un espacio loc. compacto.

Ejemplo

Sea G un grupo abeliano localmente compacto y sea $A \subseteq B(L^2(G))$ su álgebra de grupo de von Neumann. Entonces A es conmutativa. Además

$$A \cong L^\infty(G^\vee),$$

donde $G^\vee := \{\varphi : G \longrightarrow \mathbb{S}^1 : \varphi \text{ es un homomorfismo continuo}\}$
Por ejemplo

- $\mathbb{R}^\vee \cong \mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}^\vee \cong \mathbb{S}^1$
- $(\mathbb{S}^1)^\vee \cong \mathbb{Z}$
- $(\mathbb{R}^\times)^\vee \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{R}$

Factores

Definición

Decimos que un álgebra de von Neumann $A \subseteq B(H)$ *es un* **factor** *si* $A \cap A' = \mathbb{C}I$.

Teorema

Sea $A \subseteq B(H)$ *un factor. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El álgebra de von Neumann* A *tiene una representación irreducible.*
2. *El álgebra de von Neumann* A *es isomorfa a* $B(W)$, *para algún espacio de Hilbert* W.

Definición

Un álgebra de von Neumann que satisface las condiciones del teorema anterior se conocen como **factor de tipo I.**

Teorema

Si A es un factor de tipo I, entonces cada representación de A es una suma directa de representaciones irreducibles.

Teorema

Sea G un grupo algebraico lineal reductivo sobre $\mathbb{R}$ y sea A su álgebra de grupo de von Neumann. Entonces A puede ser escrito como una integral directa $\int_X A_x$ de factores A_x de tipo I.