Lectura 10

Caracterización de álgebras de von Neumann como duales de espacios de Banach.

Josué Ramírez Ortega

27 de abril del 2022

De acuerdo a la lectura 7, si $A \subset B(H)$ es una álgebra de von Neumann, entonces $A \cong W^\vee$ para algún espacio de Banach W, la topología ultradébil en A se identifica con la topología débil-$*$ en $W^\vee$. Recíprocamente,

Teorema 1 Sea A una álgebra C^*. Supóngase que existe un espacio de Banach E y un isomorfismo $\phi : A \to E^\vee$ de espacios de Banach. Entonces existe una álgebra de von Neumann B y un isomorfismo

$$A \to B$$

de álgebras C^*, el cual induce una estructura de álgebra de von Neumann en A.

<u>NOTA</u> La multiplicación en una álgebra de von Neumann es ultradébil continua en cada factor por lo que se asume que:

(*) Para cada $a \in A$, los operadores

$$\lambda_a, r_a : A \to A$$

de multiplicación por a por la izquierda y la derecha son $*$-débilmente continuos.

(La topología debil-$*$ en $E^\vee$ se transfiere a A con la aplicación ϕ. ?)

Fijemos un isomorfismo (isométrico) $\phi : A \to E^\vee$.

Definimos la forma bilineal acotada en $A \times E$:

$$\boxed{(a,x) = \phi_a(x)}, \quad \phi_a = \phi(a) \in E^\vee.$$

Esta dualidad induce el operador acotado

$$\begin{aligned} \phi' : E &\longrightarrow A^\vee \\ x &\longmapsto (\cdot, x) = \phi'(x). \end{aligned}$$

Sea $\hat{\phi} : A^{\vee\vee} \to E^\vee$ el adjunto de ϕ'. Tomemos en cuenta el mapeo canónico $j : A \to A^{\vee\vee}$, es decir, $j(a)$ es el funcional de evaluación para cada $a \in A$

$$\begin{aligned} \hat{a} = j(a) : A^\vee &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\phi \text{ isometría}", "\cong"'] \arrow[dr, "j"'] & & E^\vee \\ & A^{\vee\vee} \arrow[ur, "\hat{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\|\cdot\|$- continuo

wk*- continuo

$$[\hat{\phi}(j(a))](x) = [j(a)](\phi'(x)) = [\phi'(x)](a)$$
$$= (a,x) = \phi_a(x).$$

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio topológico localmente convexo (LCS), cuya topología τ está definida por una familia $\mathcal{P}$ de seminormas. El dual topologico $\mathfrak{X}^\vee = (\mathfrak{X}, \tau)^\vee$ es el espacio de funcionales τ-continuos.

La topología débil en $\mathfrak{X}$, denotada por wk ó $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^\vee)$, es la topología definida por las seminormas

$$p_f(x) = |f(x)|, \qquad f \in \mathfrak{X}^\vee.$$

La topología débil-* en $\mathfrak{X}^\vee$, denotada por wk* o $\sigma(\mathfrak{X}^\vee, \mathfrak{X})$, es la topología definida por las seminormas

$$p_x(f) = |f(x)|, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Se cumple que (Conway, capítulo 5)

1) $(\mathfrak{X}, wk)^\vee = \mathfrak{X}^\vee = (\mathfrak{X}, \tau)^\vee$

2) $(\mathfrak{X}^\vee, wk^*)^\vee = \mathfrak{X}$.

Siendo $\mathfrak{X}$ un dual, tiene una topología débil-*, la cual coincide con la topología débil. Análogamente, $\mathfrak{X}^\vee$ tiene una topología débil, la cual coincide con la topología débil-$*$.

Por otra parte, si $(\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ es un espacio normado, entonces el dual $\mathfrak{X}^{\vee\vee} = (\mathfrak{X}^{\vee}, \|\cdot\|)^{\vee}$ es más grande que $\mathfrak{X}$, en general. La igualdad se da cuando $\mathfrak{X}$ es reflexivo.

<u>Proposición</u> Si $\mathfrak{X}$ es un espacio normado, entonces $\mathfrak{X}$ es denso en $\mathfrak{X}^{\vee\vee}$ con la topología débil-$*$ en $\mathfrak{X}^{\vee\vee}$.

<u>Dem</u>. Conway, capítulo 5, reflexividad.

A Course in Functional Analysis, Graduate Texts in Mathematics 96.

∎

(5)

Lema La aplicación $\hat{\phi} : A^{\vee\vee} \longrightarrow E^{\vee}$ es continua respecto a las topologías débil-$*$ en $A^{\vee\vee}$ y $E^{\vee}$.

Dem. Sea $F \in A^{\vee\vee}$ y $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset A^{\vee\vee}$ una red convergente a F respecto a la topología débil-$*$, es decir,

$$F_\lambda(f) \longrightarrow F(f) \quad \forall f \in A^{\vee}.$$

Veamos que $\{\hat{\phi}(F_\lambda)\} \subset E^{\vee}$ converge a $\hat{\phi}(F)$ respecto a la topología débil-$*$ en $E^{\vee}$.

Para $x \in E^{\vee}$,

$$[\hat{\phi}(F_\lambda)](x) = [F_\lambda \circ \phi'](x) = F_\lambda(\phi'(x)) \longrightarrow F(\phi'(x)) = [\hat{\phi}(F)](x).$$

$\blacksquare$

Demostración de Teorema 1.

Sea $r = \phi^{-1} \circ \hat{\phi} : A^{\vee\vee} \to A$. Entonces r es un inverso izquierdo de j:

$$r \circ j = \phi^{-1} \circ \hat{\phi} \circ j = \phi^{-1} \circ \phi = id.$$

Se ha visto que $A^{\vee\vee}$ admite la estructura de un álgebra de von Neumann y que $j : A \to A^{\vee\vee}$ puede considerarse como un $*$-homomorfismo de modo que $A^{\vee\vee}$ resulta la envoltura de von Neumann de A.

Fijemos $a \in A$. Sean l_a y $l_{j(a)}$ los operadores de multiplicación por a y $j(a)$ en A y $A^{\vee\vee}$, respectivamente. Consideremos

$$
\begin{tikzcd}
j(A) \subset A^{\vee\vee} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "l_{j(a)}"] & A \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "l_a"] & E^{\vee} \\
A^{\vee\vee} \arrow[r, "r"] & A \arrow[r, "\phi", "\cong"'] & E^{\vee}
\end{tikzcd}
$$

El diagrama conmuta en $j(A) \subset A^{\vee\vee}$:

$$a\, r(j(x)) = ax = r(j(ax)) = r(j(a)\, j(x)) = r(l_{j(a)}(j(x))).$$

Las aplicaciones r, l_a y $l_{j(a)}$ son wk*-continuas.

Como $j(A)$ es $w\kappa^*$-denso en A^{vv}, entonces el diagrama es conmutativo.

Sea $K = \ker r \subset A^{vv}$ el cual es $w\kappa^*$-cerrado (y ultra-débilmente cerrado). Si $x \in K$ entonces

$$r(j(a)x) = a r(x) = 0.$$

Esto es, $j(a)K \subset K$. Dado que la multiplicación por la derecha es ultra-débilmente continua, el conjunto

$$\{ y \in A^{vv} : yx \in K \}$$

es ultradebilmente cerrado y contiene a $j(A)$. Pero $j(A)$ es ultradébilmente denso en A^{vv}, por lo tanto K es un ideal izquierdo de A^{vv}. Análogamente se demuestra que es un ideal derecho. Por lo tanto, $K^* = K$. El álgebra A^{vv} se descompone en un producto

$$A^{vv} \cong A^{vv}/K \times K.$$

Sea $B = A^{\vee\vee}/K$. La composición

$$A \xrightarrow{j} A^{\vee\vee} \xrightarrow{\pi} B$$

es un homomorfismo de álgebras C^*.

Entonces

$$\boxed{A \cong A^{\vee\vee}/K.}$$

$\blacksquare$

Una pregunta natural es sobre la unicidad del espacio E y en qué sentido. Esto es, si

$$E^{\vee} \cong A \cong E'^{\vee},$$

¿se puede identificar E con E'? Esta pregunta nos lleva al siguiente problema.

Sean B y B' álgebras de von Neumann y $f: B \to B'$ un isomorfismo de álgebras C^*. ¿Es f un isomorfismo de álgebras de von Neumann? es decir, ¿f es continuo respecto a las topologías ultradébiles?

Sea $\{e_\alpha\}$ una familia de proyecciones ortogonales en $B(V)$. Cada e_α es una proyección ortogonal de V sobre cierto subespacio cerrado U_α. Si

$$U = \overline{\text{gen}\{U_\alpha\}},$$

entonces se define la proyección ortogonal sobre U, la cual se denota por

$$\bigvee_{\alpha} e_\alpha .$$

Esta es la mínima proyección mayor o igual que cada e_α. Cuando los subespacios U_α son mutuamente ortogonales, se cumple

$$\bigvee_{\alpha} e_\alpha = \sum_{\alpha} e_\alpha ,$$

donde la serie converge en la topología fuerte de operadores (K. Zhu).

<u>Definición</u> Sean A y B álgebras de von Neuman y $\phi : A \to B$ un homomorfismo de álgebras involutivas. Se dice que ϕ es completamente aditivo si para cada familia de proyecciones e_α mutuamente ortogonales en A se cumple

$$\phi\left(\sum e_\alpha\right) = \sum \phi(e_\alpha).$$

Teorema Sea $\phi : A \to B$ un $*$-homomorfismo entre álgebras de von Neumann. Entonces ϕ es continuo ultradébilmente si y sólo si ϕ es completamente aditivo.

Dem Siguiente lectura.

Corolario Sea $\phi : A \to B$ un $\overbrace{*\text{-isomorfismo}}^{\text{sentido algebraico}}$ entre álgebras de von Neumann. Entonces ϕ es ultradébilmente continuo.

Dem Vamos a demostrar que ϕ es completamente aditivo. Sea $\{e_\alpha\}$ una familia de proyecciones ortogonales mutuamente perpendiculares. Sea $U_\alpha < V$ la imagen de e_α, donde $A \subset B(V)$.

Sea

$$U = \overline{\text{gen}\{U_\alpha\}}.$$

Cada $f_\alpha = \phi(e_\alpha)$ es una proyección ortogonal sobre cierto espacio $W_\alpha < \mathcal{H}$, donde $\mathcal{B} \subset B(\mathcal{H})$. Para cada colección finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} \leq f := \sum f_\alpha .$$

Como A y $\mathcal{B}$ son álgebras C^*, entonces ϕ es un isomorfismo de álgebras C^* (bicontinuo). Luego ϕ preserva el orden,

$$\sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} = \phi\left(\sum_{j=1}^{n} e_{\alpha_j}\right) \leq \phi\left(\sum e_\alpha\right).$$

Como f es la mínima proyección mayor o igual que cada $\sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j}$, entonces

$$\sum \phi(e_\alpha) = \sum f_\alpha \leq \phi\left(\sum e_\alpha\right).$$

La otra desigualdad se consigue de ϕ^{-1}! ▨