De Lectura 07

(1)

Proposición Sea M un espacio de Banach y $A \subset M^\vee$ subespacio wk*-cerrado. Entonces $A \cong W^\vee$ para algún espacio de Banach W.

Dem. Sea $K = \bigcap_{f \in A} \ker f$ y $W = M/K$.

Sea $Q : M \to W$ la proyección estandar y $j : K \to M$ el encaje trivial. Tenemos la sucesión exacta

$$(I) \qquad 0 \longrightarrow K \xhookrightarrow{j} M \xrightarrow{Q} W \to 0,$$

la cual induce la sucesión exacta

$$(II) \qquad 0 \longrightarrow W^\vee \xrightarrow{Q^\vee} M^\vee \xrightarrow{j^\vee} K^\vee \to 0.$$

El operador adjunto $j^\vee$ actúa por por restricción $j^\vee(f) = f \circ j = f|_K$.

Debido al teorema de extensión de Hahn-Banach, $j^\vee$ es sobreyectivo. Mientras que $Q^\vee$ es inyectivo porque Q es sobreyectivo.

Sea $f \in W^\vee$ y $F = Q^\vee(f) = f \circ Q$. Entonces $j^\vee(F) = f \circ Q \circ j = 0$ pues $Q \circ j = 0$. Por lo tanto $Q^\vee(W^\vee) \subset \ker j^\vee$. Ahora supongamos que $F \in \ker j^\vee$, es decir, $F \circ j = 0 : K \to \mathbb{C}$. Entonces $K \subset \ker F$. Se define un funcional $f: W \to \mathbb{C}$ mediante ②

$$f(x+K) = F(x).$$

el cual cumple que $Q^\vee(f) = f \circ Q = F$.
Esto demuestra que $\operatorname{Ker} j^\vee \subset Q^\vee(W^\vee)$.
Hemos demostrado que (II) es una sucesión exacta. Ahora veamos que $A = \operatorname{Ker} j^\vee$.
Si $f \in A$, entonces $j^\vee(f) = f|_K = 0$.
Sea $f \in \operatorname{Ker} j^\vee$, de modo que f se anula en K. Veamos que f está en la cerradura debil-$*$ de A. Sean $x_1, \dots, x_n \in M$ y $\varepsilon > 0$. Afirmamos que existe $g \in A$ tal que $f(x_i) = g(x_i)$, de donde

$$|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon \quad i = \overline{1,n}.$$

Consideremos la transformación continua

$$T: M^\vee \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

dada por

$$T(h) = (h(x_1), \dots, h(x_n)).$$

Por contradicción, supongamos que $T(f) \notin T(A)$.
Existe un funcional $\phi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ que anula al subespacio $T(A)$ y $\phi(f) \neq 0$.
El funcional ϕ está dado por ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n.$$

Sea $G = \phi \circ T \in M^{\vee\vee}$, la cual cumple

$$G(h) = h(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n). \quad \forall h \in M^\vee.$$

En particular,

$$0 = \phi(T(h)) = h(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_1 x_n). \quad \forall h \in A.$$

Por lo tanto, $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in K$. Así $f(x) = 0$ y $f(x) = \phi(T(f)) \neq 0$. Esto demuestra que $T(f) \in T(A)$, es decir, existe $g \in A$ tal que $T(f) = T(g)$.

Esto es,

$$f(x_i) = g(x_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Dado que $Q^\vee : W^\vee \to M^\vee$ es continuo inyectivo y $A = \operatorname{Ker} j^\vee$ es cerrado, entonces

$$Q^\vee : W^\vee \to A$$

es un isomorfismo debido al teorema del mapeo abierto. En realidad $Q^\vee$ es una isometría. En efecto, sea $F \in W^\vee$.

Entonces $f = Q^\vee(F) = F \circ Q : M \to \mathbb{C}$.

obviamente

$$\|f\| = \|F \circ Q\| \le \|F\| \|Q\| = \|F\|.$$

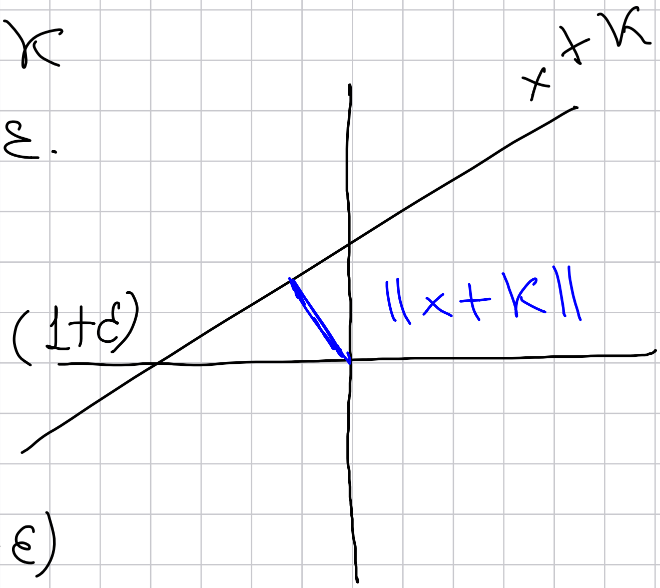
$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "Q"] \arrow[dr, "f"] & \\ M/K \arrow[r, "F"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Supongamos que $F \neq 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in M$ tal que $\|x+K\| = 1$ y

$$\|F(x+K)\| > \|F\| - \varepsilon.$$

También existe $y \in x+K$ tal que $1 \leq \|y\| < 1+\varepsilon$.



Entonces

$$|F(x+K)| = |F(y+K)| = |f(y)| \leq \|f\|\,(1+\varepsilon)$$

Luego

$$\|F\| - \varepsilon < \|f\|\,(1+\varepsilon)$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$,

$$\|F\| \leq \|f\|. \qquad \blacksquare$$

PE LECTURA 06

5

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio espacio de Hilbert.
Sea $\boxed{\mathfrak{X} = L^1(V \times V, d\mu),}$ donde la σ-álgebra es la potencia de $V \times V$ y la medida de cada conjunto singular

$$\mu(v,w) = \|v\|\,\|w\|. \qquad (e_{v,w} = (v,w))$$

Se define el operador acotado

$$\boxed{\rho : \mathfrak{X} \to B(V)}$$

mediante

$$x = \sum_{(v,w)} \lambda_{v,w}\, e_{v,w} \longmapsto \sum_{(v,w)} \lambda_{v,w}\, v \otimes w$$

donde

$$(v \times w)(u) = (u,w)\, v.$$

El espacio de operadores de clase traza se define como la imagen de ρ:

$$\boxed{B^{tc}(V) = \rho(\mathfrak{X}),}$$

el cual es un $*$-ideal bilateral de $B(V)$.

Como $\rho : \mathfrak{X} \to B(V)$ es continuo, el núcleo $\ker \rho$ es un subespacio cerrado. El cociente $\mathfrak{X}/\ker\rho$ con la norma cociente es un espacio de Banach. $\boxed{\text{La norma de } \mathfrak{X}/\ker\rho \text{ se transfiere a } B^{tc}(V):}$

$$\|\rho(x)\| = \|x + \operatorname{Ker}\rho\| = \inf_{y \in x + \operatorname{Ker}\rho} \|y\|_{\mathbb{X}} .$$

Cada operador $f \in B(V)$, define un funcional $\boxed{\chi_f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}}$ por la fórmula

$$\chi_f\left(\sum \lambda_{v,w} e_{v,w}\right) = \sum \lambda_{v,w} (f(v), w)$$

Se cumple que χ_f es continuo y $\boxed{\|\chi_f\| = \|f\|.}$

Además $\operatorname{Ker}\rho \subset \operatorname{Ker}\chi_f$. Entonces χ_f induce un funcional continuo $\hat{f}$ en $\mathbb{X}/\operatorname{Ker}\rho$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
B^{tc}(V) & \mathbb{X} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "\chi_f"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C} \\
& \mathbb{X}/\operatorname{Ker}\rho \arrow[ul, "\bar{\rho}", "\cong"'] \arrow[ur, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Isometría

Desde luego $\chi_f = \hat{f} \circ \pi = \pi^{\vee}(\hat{f})$ y $\boxed{\|\hat{f}\| = \|\chi_f\|.}$

El operador $f \in B(V)$ induce el funcional

$$\bar{f} = \hat{f} \circ \bar{\rho}^{-1} : B^{tc}(V) \to \mathbb{C}.$$

Se cumple

$$\bar{f}\left(\sum \lambda_{v,w} v \otimes w\right) = \sum \lambda_{v,w} (f(v), w).$$

$\boxed{\text{Teorema. La aplicación } \Phi : f \mapsto \tilde{f} \text{ es un isomorfismo isométrico de } B(V) \text{ en } (B^{tc}(V))^{\vee}.}$

En particular tomamos el operador identidad para definir la traza $B^{tc}(V)$:

$$tr\left(\sum \lambda_{v,w}\, v \otimes w\right) = \sum \lambda_{v,w} (v,w)_V .$$

Para cada $f \in B(V)$ y $g \in B^{tc}(V)$,

$$tr(fg) = tr(gf).$$

Finalmente, cada elemento de $B^{tc}(V)$ puede representarse como

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \otimes w_i ,$$

donde $\sum \|v_i\|^2 < \infty$ y $\sum \|w_i\|^2 < \infty$.

De Lectura 07

Retomamos el isomorfismo isométrico

$$\Phi : \mathcal{B}(V) \to (\mathcal{B}^{tc}(V))^{\vee}$$
$$f \longmapsto \bar{f}$$

donde

$$\bar{f}\left(\sum \lambda_{v,w}\, v \otimes w\right) = \sum \lambda_{v,w}\, (f(v), w).$$

<u>Lema</u> $\Phi : (\mathcal{B}(V), \mathcal{T}_{u}) \to (\mathcal{B}^{tc}(V)^{\vee}, wk^{*})$ es un homeomorfismo, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología ultradébil y wk^{*} la topología débil-$*$.

<u>Dem</u> Basta ver que Φ y Φ^{-1} son continuas en 0. En $(\mathcal{B}^{tc}(V)^{\vee}, wk^{*})$ tomemos una vecindad

$$U = \{ F \in \mathcal{B}^{tc}(V)^{\vee} : |F(x_i)| < \varepsilon,\ i = \overline{1,n} \}$$

donde $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{B}^{tc}(V)$. Cada x_i se expresa como

$$x_i = \sum_j v_j^i \otimes w_j^i,$$

donde $\sum_j \|v_j^i\|^2,\ \sum_j \|w_j^i\|^2 < +\infty.$

Una vecindad de 0 en $B(V)$ respecto a la topología ultradébil es

$$\tilde{U} = \{ f : \left| \sum_j (f(v_j^i), w_j^i) \right| < \varepsilon, \ i = \overline{1,n} \}.$$

Si $f \in \tilde{U}$, entonces $\bar{f} = \Phi(f) \in U$:

$$|\bar{f}(x_i)| = \left| \bar{f}\left(\sum_j v_j^i \otimes w_j^i\right) \right|$$

$$= \left| \sum_j (f(v_j^i), w_j^i) \right| < \varepsilon.$$

Recíprocamente, si partimos de la vecindad $\tilde{U}$, con $\sum_j \|v_j^i\|^2, \sum_j \|w_j^i\|^2 < +\infty$, entonces se define $x_i = \sum_j v_j^i \otimes w_j^i$ y la vecindad U. Se tiene

$$\Phi^{-1}(U) \subset \tilde{U}. \quad \blacksquare$$

Sea $\boxed{A \subset B(V)}$ una álgebra de von Neumann. Entonces $\boxed{\Phi(A) < B^{tc}(V)^\vee}$ es un subespacio wk*-cerrado. Sea

$$\boxed{K = \bigcap_{f \in A} \operatorname{Ker} \bar{f}.}$$

Sea $Q : B^{tc}(V) \longrightarrow W = B^{tc}(V)/K$ la proyección canónica. Entonces el adjunto

$$Q^{\vee} : W^{\vee} \longrightarrow \Phi(A) \subset B^{tc}(V)^{\vee}$$

es un isomorfismo isométrico. Para $f \in A$, tenemos

$K = \operatorname{Ker} \bar{f}$

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\
B^{tc}(V) \arrow[ur, "Q"] \arrow[rr, "\bar{f}"] & & \mathbb{C} \\
 & \mathbb{X} \arrow[ul, "\rho"'] \arrow[ur, "\chi_f"] \arrow[d, "\pi"] & \\
 & \mathbb{X}/\operatorname{ker}\rho \arrow[uul, "\tilde{\rho}"] \arrow[uur, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Tenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow K \xhookrightarrow{j} B^{tc}(V) \xrightarrow{Q} W \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow W^{\vee} \xrightarrow{Q^{\vee}} B^{tc}(V)^{\vee} \xrightarrow{j^{\vee}} K^{\vee} \longrightarrow 0,$$

donde $Q^{\vee}(W^{\vee}) = \Phi(A) = \operatorname{Ker} j^{\vee}$. Los operadores

$$Q^{\vee} : W^{\vee} \longrightarrow \Phi(A)$$

$$\Phi : B(V) \longrightarrow B^{tc}(V)^{\vee}$$

son isomorfismos isométricos. Además Φ es un homeomorfismo con las topologías ultra-débil y débil-$*$.

Lema $Q^{\vee} : (W^{\vee}, wk^{*}) \longrightarrow (\Phi(A), wk^{*})$ es un homeomorfismo.

<u>Dem.</u> PENDIENTE

Ahora supongamos que A es una álgebra C^*.
Existe una álgebra de von Neumann $E(A) \subset B(V)$ y un $*$-homomorfismo
$$\rho : A \to E(A)$$
tal que para cada álgebra de von Neumann A' y cada $*$-homomorfismo $\phi : A \to A'$, existe un $*$-homomorfismo $\psi : E(A) \to A'$ ultra-débilmente continuo tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\phi"'] & E(A) \arrow[d, "\psi"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

isometría

ultradébilmente continua

Necesariamente ρ es inyectivo, y por lo tanto, ρ es una isometría. (Dixmier).
Se tiene el isomorfismo isométrico
$$\Theta = \Phi^{-1} \circ Q^{\vee} : W^{\vee} \longrightarrow E(A)$$
donde
$$\Phi : B(V) \to B^{tc}(V)^{\vee}, \quad \hat{f} = \Phi(f)$$
$$K = \bigcap_{f \in E(A)} \operatorname{Ker} \hat{f},$$

$$W = B^{tc}(V)/K,$$

$$Q : B^{tc}(V) \longrightarrow W \quad \text{proyección.}$$

El mapeo Θ lleva la topología débil-$*$ a la topología ultradébil.

Φ $\tau_v - wk^*$ homeomorfismo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho\ \text{isometría}"] \arrow[dr, "\tilde{\rho}"', "\text{isometría}"] & E(A) \arrow[r, "\Phi\ \text{isometría}"] \arrow[d, "\Theta^{-1}"', "\text{isometría}"] & \Phi(E(A)) \\
& W^\vee \arrow[ur, "Q^\vee"', "\text{isometría, } wk^*\text{-homeomorfismo}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{\rho} := \Theta^{-1} \circ \rho$$

La aplicación $\tilde{\rho}$ induce una forma bilineal acotada en $A \times W$ mediante

$$(a, x) = [\tilde{\rho}(a)](x).$$

Definimos el operador acotado

$$\rho' : W \to A^\vee$$
$$x \mapsto (\cdot, x).$$

Lema La restricción de $\rho'^\vee : A^{\vee\vee} \longrightarrow W^\vee$ a A es el operador $\tilde{\rho}$, donde A se identifica con el encaje canónico en $A^{\vee\vee}$.

Dem Tomemos $a \in A$, el cual induce el funcional de evaluación $\hat{a} : A^\vee \to \mathbb{C}$.

Para $x \in W$,

$$[\rho'^{\vee}(\hat{a})](x) = [\hat{a} \circ \rho'](x) = \hat{a}(\rho'(x)) = \hat{a}((\cdot, x)) = (a, x) = [\tilde{\rho}(a)](x). \quad \blacksquare$$

Lema La aplicación $\rho' : W \to A^{\vee}$ es un isomorfismo de espacios de Banach.

Dem. Como $\rho(A)$ es denso en $E(A)$ con la topología ultradébil, $\tilde{\rho}(A)$ es denso en $W^{\vee}$ con la topología débil-$*$.

Supongamos que $\rho'(x) = (\cdot, x) = 0$, es decir, $(a, x) = [\tilde{\rho}(a)](x) = 0 \quad \forall a \in A$. Para cada $f \in W^{\vee}$ existe una red $\{\tilde{\rho}(a_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $\tilde{\rho}(a_\lambda) \xrightarrow[wk^*]{} f$.

Así $f(x) = \lim [\tilde{\rho}(a_\lambda)](x) = 0$. Por lo tanto, $x = 0$. Es decir, ρ' es inyectiva.

Veamos que cada estado $\mu : A \to \mathbb{C}$ se extiende a $E(A)$..

El estado μ induce una representación (Dixmier) $\pi_\mu : A \to B(V_\mu)$ y existe un vector cíclico $\xi_\mu \in V_\mu$ tal que

$$\mu(a) = \langle \pi_\mu(a)\xi_\mu, \xi_\mu \rangle_{V_\mu}.$$

Sea $S(A)$ el conjunto de estados de A y $V = \bigoplus_{\mu'} V_{\mu'}$. Se tiene la representación

$$\begin{aligned} \pi : A &\to B(V) \\ a &\mapsto \pi(a) = \bigoplus \pi_{\mu'}(a) \end{aligned}$$

El álgebra de von Neumann $E(A)$ es la cerradura de $\pi(A)$ respecto a la topología ultradébil. Entonces

$$\begin{aligned} \rho : A &\longrightarrow E(A) < B(V). \\ a &\longmapsto \rho(a) = \pi(a) \end{aligned}$$

Para cada $\mu' \neq \mu$, se toma $\xi_{\mu'} = 0 \in V_{\mu'}$. Entonces $\xi = \sum_{\mu'} \xi_{\mu'} \in V$ y

$$\mu(a) = \langle \rho(a)\xi, \xi \rangle_V.$$

Tenemos un estado en $E(A)$ que es una extensión de μ:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\mu"'] & E(A) \ni T \arrow[d, "\bar{\mu}"] \\ & \mathbb{C} \ni \langle T\xi, \xi \rangle_V \end{tikzcd}$$

El estado $\bar{\mu}(T) = \langle T\xi, \xi\rangle_V$ es continuo respecto a la topología ultradébil. Por otra parte, cada funcional de A es combinación lineal de estados (Dixmier), entonces cada funcional de A se extiende a $E(A)$ y la extensión es ultradébilmente continua.

Sea $\mu \in A^\vee$ y $\bar{\mu}$ su extensión a $E(A)$.

Pendiente resto de prueba respecto a sobreyectividad

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C} \\
A \arrow[urr, "\mu"] \arrow[rr, "\rho"] \arrow[d, "j"'] \arrow[drr, "\tilde{\rho}"] & & E(A) \arrow[u, "\bar{\mu}"'] \arrow[d, "\theta^{-1}"] \\
A^{\vee\vee} \arrow[rr, "\rho'^{\vee}"'] & & W^\vee
\end{tikzcd}$$

Retomamos los isomorfismos de espacios de Banach

$$W^\vee \xrightarrow{\Theta} E(A), \qquad W \xrightarrow{\rho'} A^\vee,$$

donde Θ es también un homeomorfismo respecto a las topologías $*$-débil y ultradébil. Entonces tenemos los isomorfismos de espacios de Banach

$$A^{\vee\vee} \xrightarrow{\rho'^\vee} W^\vee \xrightarrow{\Theta} E(A).$$

Desde luego $\rho'^\vee$ es también es un wk^*-homeomorfismo. Entonces

$$\bar{\rho} = \Theta \circ \rho'^\vee : A^{\vee\vee} \longrightarrow E(A)$$

es un isomorfismo de espacios de Banach y también es un homeomorfismo respecto a las topologías $*$-débil (en $A^{\vee\vee}$) y ultradébil (en $E(A)$). Es decir, la estructura de álgebra de von Neumann de $E(A)$ se transfiere al doble dual $A^{\vee\vee}$.

Este doble dual es entonces la envoltura de von Neumann de A.

Sea $j : A \hookrightarrow A^{\vee\vee}$ es encaje canónico, es decir, $\hat{a} = j(a) : A^{\vee} \to \mathbb{C}$ es el funcional de evaluación en a. Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, hook, "j"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
A^{\vee\vee} \arrow[rr, "\bar{\rho}"] & & E(A).
\end{tikzcd}$$

Para $a \in A$,

$$\bar{\rho}(j(a)) = (\Theta \circ \rho^{\vee\vee} \circ j)(a) = (\Theta \circ \tilde{\rho})(a)$$
$$= (\Theta \circ \Theta^{-1} \circ \rho)(a)$$
$$= \rho(a).$$

EN RESUMEN:

$E(A) < B(V)$

$$\begin{tikzcd}
 & A^{\vee\vee} \arrow[d, "\bar{\rho}", "\substack{\text{isomorfismo de Banach}\\ wk^*-\tau_U \text{ homeomorfismo}}"'] & \\
A \arrow[ur, hook, "\substack{\text{encaje isométrico}\\ j}"] \arrow[r, "\substack{\rho \text{ isometría}\\ \text{envoltura}}"] \arrow[d, hook, "\substack{\text{encaje}\\ j}"'] \arrow[dr, "\substack{\tilde{\rho} := \Theta^{-1}\circ\rho\\ \text{isometría}}"] & E(A) \arrow[r, "\substack{\Phi \text{ isometría}\\ \tau_U - wk^* \text{ homeomorfismo}}"] & \Phi(E(A)) \\
A^{\vee\vee} \arrow[r, "\rho^{\vee\vee}", "\substack{\|\cdot\| \cong\\ wk^* \cong}"'] & W^{\vee} \arrow[u, "\Theta", "\substack{\text{isometría}\\ wk^*-\tau_U \cong}"'] \arrow[ur, "\substack{Q^{\vee}\\ \text{isometría}\\ wk^*-\text{homeomorfismo}}"'] &
\end{tikzcd}$$

?

$\Phi : B(V) \longrightarrow B^{tc}(V)^\vee$, $\quad K = \bigcap_{f \in E(A)} \operatorname{Ker} \Phi(f)$,

$W = B^{tc}(V)/K$, $\quad Q : B^{tc}(V) \to W$ proyección

$Q^\vee$ es el adjunto de Q, $\quad \Theta = \Phi^{-1} \circ Q^\vee$

Forma bilineal

$$(a, x) = [\tilde{\rho}(a)](x).$$

en $A \times W$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho' : W &\overset{?}{\cong} A^\vee \\ x &\longmapsto (\cdot, x) \end{aligned}} \quad ?$$

$\rho'^\vee : A^{\vee\vee} \longrightarrow W^\vee$, $\quad \bar{\rho} = \Theta \circ \rho'^\vee$

El producto en $E(A)$ se transfiere a los espacios $\Phi(E(A))$, $W^\vee$ y $A^{\vee\vee}$ con los isomorfismos isométricos Φ, Θ y $\bar{\rho}$, respectivamente. El producto en $E(A)$ ultradébilmente continuo en cada factor, esto significa que el producto en cada espacio $\Phi(E(A))$, $W^\vee$ y $A^{\vee\vee}$ es $*$-débilmente continuo en cada variable.