Álgebras de von Neumann (Lectura 11)

Teorema

Cualquier isomorfismo-$*$ entre álgebras de von Neumann es ultradébilmente continuo.

Teorema

Sea $\phi : A \longrightarrow B$ un homomorfismo-$*$ entre álgebras de von Neumann. Si ϕ es completamente aditivo, entonces es ultradébilmente continuo.

Proposición

Sea $\phi : A \longrightarrow B$ completamente aditivo. Entonces ϕ es ultradébilmente continuo $\Longleftrightarrow$ para todo funcional lineal ultradébilmente continuo $\mu : B \longrightarrow \mathbb{C}$, la composición $\mu \circ \phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es ultradébilmente continuo.

Lema

Sea $B \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann. Entonces el espacio vectorial de funcionales ultradébilmente continuos sobre B está generado por estados ultradébilmente continuos.

Demostración.

Cada funcional ultradébilmente continuo $\mu : B \longrightarrow \mathbb{C}$ está dado por $\mu(T) = \sum_n \langle Tv_n, w_n \rangle$ con $\sum_n ||v_n||^2 < \infty$ y $\sum_n ||w_n||^2 < \infty$ (ver [2]). Definimos $\hat{T} : H^\infty \longrightarrow H^\infty$ por $\hat{T}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces

$$\mu(T) = \langle \hat{T}((v_n)_{n\in\mathbb{N}}), (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_{H^\infty}$$

Luego

$$\begin{aligned} 4\mu(T) =& \langle \hat{T}((v_n + w_n)_n), (v_n + w_n)_n \rangle + i\langle \hat{T}((v_n + iw_n)_n), (v_n + iw_n)_n \rangle \\ & - \langle \hat{T}((v_n - w_n)_n), (v_n - w_n)_n \rangle - i\langle \hat{T}((v_n - iw_n)_n), (v_n - iw_n)_n \rangle \end{aligned}$$

Notemos que el funcional $T \longmapsto \langle \hat{T}x, x \rangle$ tiene por norma $||x||^2_{H^\infty}$, de modo que $T \longmapsto \frac{1}{||x||^2} \langle \hat{T}x, x \rangle$ es un estado. □

Funcionales completamente aditivos

Definición

Sea A un álgebra de von Neumann y $\mu : A \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional. Decimos que μ es **completamente aditivo** *si para toda colección $\{e_\alpha\}_\alpha$ de proyecciones mutuamente ortogonales en A, tenemos*

$$\mu(\sum e_\alpha) = \sum \mu(e_\alpha)$$

Observación

Cada funcional ultradébilmente continuo es completamente aditivo. Más aún, si $\phi : A \longrightarrow B$ es completamente aditivo y $\mu : B \longrightarrow \mathbb{C}$ es un estado completamente aditivo, entonces $\mu \circ \phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es un estado completamente aditivo.

Proposición

Sea $A \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann. Todo estado completamente aditivo $A \longrightarrow \mathbb{C}$, es ultradébilmente continuo.

Sea A un álgebra de von Neumann. Denotamos por

$$A_{\leq 1} := \{T \in A : ||T|| \leq 1\}$$

la bola cerrada unitaria.

Lema

Sea $A \subseteq B(H)$ *un álgebra de von Neumann y sea* $\mu : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *un estado completamente aditivo. Entonces* $\mu| : A_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{C}$ *es ultrafuertemente continuo.*

Lema

Sea A *un álgebra de von Neumann y sea* $\mu : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *un funcional lineal. Si* μ *es ultrafuertemente continuo en* $A_{\leq 1}$*, entonces* μ *es ultradébilmente continuo.*

Proposición

Sea $A \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann conmutativa y $X = Spec(A)$. Entonces para toda función continua $f : X \longrightarrow [-1, 1]$, existe una descomposición $X = X_- \coprod X_+$ en subconjuntos abiertos y cerrados, donde $\{x \in X : f(x) < 0\} \subset X_-$ y $\{x \in X : f(x) > 0\} \subset X_+$.

Demostración.

Consideremos $f_+ : X \longrightarrow [0, 1]$ por

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} = \text{máx}\{f(x), 0\}$$

Dado que $\Gamma^{-1}(f_+) = \Gamma^{-1}(f_+)^* \in B(H)$, tenemos

$$H = ker(\Gamma^{-1}(f_+)) \oplus ker(\Gamma^{-1}(f_+))^\perp = ker(\Gamma^{-1}(f_+)) \oplus \overline{Im(\Gamma^{-1}(f_+))}$$

Notemos que si $x \in ker(\Gamma^{-1}(f_+))$ y $T \in A'$, entonces

$$\Gamma^{-1}(f_+) \circ T(x) = T \circ \Gamma^{-1}(f_+)(x) = 0$$

Así, la proyección ortogonal $e : H \longrightarrow \overline{Im(\Gamma^{-1}(f_+))}$ cumple $e \in A'' = A$

$$x = x_1 + x_2 \implies e(T(x)) = T(x_2) = T(e(x)) \quad \forall T \in A'$$

Como $\Gamma(e)^2 = \Gamma(e)$, se sigue que $Im(\Gamma(e)) \subseteq \{0, 1\}$. Definimos

- $X_- = \{x \in X : \Gamma(e)(x) = 0\}$
- $X_+ = \{x \in X : \Gamma(e)(x) = 1\}$

Entonces $X_-, X_+ \subseteq X$ son conjuntos abiertos y cerrados tales que $X = X_- \coprod X_+$. Ahora sea

$$f_-(x) = f(x) - f_+(x) = \min\{f(x), 0\}$$

Notemos que $e \circ \Gamma^{-1}(f_+) = \Gamma^{-1}(f_+)$. Además

$$\Gamma^{-1}(f_+) \circ \Gamma^{-1}(f_-)(x) = \Gamma^{-1}(f_+ f_-)(x) = 0 \implies \Gamma^{-1}(f_-)(x) \in ker(\Gamma^{-1}(f_+))$$

Así $e \circ \Gamma^{-1}(f_-) = 0$. Aplicando Γ, obtenemos

a) $\Gamma(e) f_+ = f_+$, b) $\Gamma(e) f_- = 0$

- Si $x \in Supp(f_+)$ por a), $\Gamma(e)(x) = 1$, i.e. $x \in X_+$.
- Si $x \in Supp(f_-)$ por b), $\Gamma(e)(x) = 0$, i.e. $x \in X_-$.

$\square$

Corolario

Sea $A \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann conmutativa y X=Spec(A). Entonces toda función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ puede ser escrita como un límite de funciones no negativas localmente constantes.

Demostración.

Consideremos

$$h : X \longrightarrow [-1,1], \qquad x \longmapsto 2f(x) - 1$$

Sean $X_+, X_- \subseteq X$ tales que $f^{-1}((\frac{1}{2},1]) = \{x \in X : h(x) > 0\} \subset X_+$, $f^{-1}([0,\frac{1}{2})) = \{x \in X : h(x) < 0\} \subseteq X_-$ y $X = X_- \coprod X_+$. Definimos

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in X_+ \\ 0 & x \in X- \end{cases}$$

Entonces $f - f_1$ es una función continua con valores en $[0,\frac{1}{2}]$. En efecto:

- Sea $x \in X_+ \Longrightarrow x \notin X_- \Longrightarrow f(x) - f_1(x) = f(x) - \frac{1}{2} \geq 0$
- Sea $x \in X_- \Longrightarrow x \notin X_+ \Longrightarrow f(x) - f_1(x) = f(x) \leq \frac{1}{2}$

Sea $n > 1$. Supongamos que

$$\exists\, f_n \geq 0 \text{ localmente constante tal que } 0 \leq f - f_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Definimos

$$\begin{array}{rccc} g: & X & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & 2^{n+1}(f(x) - f_n(x)) - 1 \end{array}$$

Sean $Y_+, Y_- \subseteq X$ tales que $X = Y_- \coprod Y_+$ y

- $(f - f_n)^{-1}([0, \frac{1}{2^{n+1}})) = \{x \in X : g(x) < 0\} \subseteq Y_-$
- $(f - f_n)^{-1}((\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]) = \{x \in X : g(x) > 0\} \subseteq Y_+$

Ahora sea

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & x \in Y_+ \\ 0 & x \in Y_- \end{cases}$$

Entonces $f_{n+1} := f_n + g_n \geq 0$ es una función localmente constante con $0 \leq f - f_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Esto concluye la inducción.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. $\square$

Corolario

Sea $A \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann y $x \in A$ un elemento positivo. Entonces x puede ser escrito como un límite (en la topología uniforme) de combinaciones lineales positivas de proyecciones mutuamente ortogonales.

Demostración.

S.p.d.g. asumimos que A es conmutativa. Entonces

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Gamma^{-1}(\chi_{X_i^+})}{2^i} \right\| = \left\| \Gamma(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\chi_{X_i^+}}{2^i} \right\|_\infty \longrightarrow 0$$

donde

$$\chi_{X_i^+}\, \chi_{X_j^+} = \chi_{X_i^+ \cap X_j^+} = 0 \qquad \forall\, i \neq j$$

pues $(f - f_i)^{-1}((\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]) \subseteq X_i^+$ y $(f - f_i)^{-1}([0, \frac{1}{2^{i+1}})) \subseteq X_i^-$. $\square$

Corolario

Sea $A \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann y $x \in A$ un elemento positivo. Entonces x puede ser escrito como un límite (en la topología uniforme) de combinaciones lineales positivas de proyecciones mutuamente ortogonales.

Demostración.

S.p.d.g. asumimos que A es conmutativa. Entonces

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Gamma^{-1}(\chi_{X_i^+})}{2^i} \right\| = \left\| \Gamma(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\chi_{X_i^+}}{2^i} \right\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

donde

$$\chi_{X_i^+} \, \chi_{X_j^+} = \chi_{X_i^+ \cap X_j^+} = 0 \qquad \forall \, i \neq j$$

pues $(f - f_i)^{-1}((\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]) \subseteq X_i^+$ y $(f - f_i)^{-1}([0, \frac{1}{2^{i+1}})) \subseteq X_i^-$. $\square$

Definición

Sea A un álgebra de von Neumann y sean $\mu, \mu' : A \longrightarrow \mathbb{C}$ funcionales lineales acotados. Escribimos

$$\mu \leq \mu' \quad si \quad \mu'(x) - \mu(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

Proposición

Sea $A \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann. Sean

- $\mu : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *un funcional lineal positivo,*
- $v \in H$ *tal que* $||v||^2 = \mu(1)$,
- $\mu_v : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *dado por* $\mu_v(T) = \langle T(v), v \rangle$.

Entonces existe $e \in \mathcal{P}(A) \setminus \{0\}$ *tal que* $\mu \leq \mu_v$ *cuando se restringen a* eAe.

Demostración.

Sean

- $S := \{e' \in \mathcal{P}(A) : \mu_v(e') < \mu(e')\}$
- $T := \{R \subseteq S : x \perp y \ \forall x, y \in R, \ x \neq y\}$

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en T. Definimos $R := \bigcup_{J \in \mathcal{C}} J \subseteq S$. Dados $x, y \in R$ con $x \neq y$, existen $J, J' \in \mathcal{C}$ tales que $x \in J$ y $y \in J'$. S.p.d.g. suponemos que $J' \subseteq J$, entonces $x, y \in J$ por lo que $x \perp y$.

Por el lema de Zorn, T tiene un elemento maximal $S_0 \subseteq S$.

Si $S_0 = \emptyset$, tenemos que $\mu(e') \leq \mu_v(e')$ para toda $e' \in \mathcal{P}(A)$, porque si no

$$\exists\ e' \in \mathcal{P}(A) \text{ tal que } \mu_v(e') < \mu(e')$$

de manera que $\{e'\} \in T$ con $S_0 = \emptyset \subseteq \{e'\}$ y así $\{e'\} = \emptyset$!!
Supongamos ahora que $S_0 \neq \emptyset$. Sea $f = \sum_{e' \in S_0} e'$, entonces

$$\mu_v(f) = \sum_{e' \in S_0} \mu_v(e') < \sum_{e' \in S_0} \mu(e') \leq \mu(f) \leq \mu(1) = ||v||^2 = \mu_v(I).$$

Así $e = I - f \in \mathcal{P}(A) \setminus \{0\}$. Notemos que

$$e_i e = e_i - \sum_{e' \in S_0} e_i e' = e_i - e_i = 0 \qquad \forall e_i \in S_0$$

En consecuencia, cada proyección en eAe es ortogonal a cada $e_i \in S_0$.
Luego $\mu(e') \leq \mu_v(e')$ para toda $e' \in \mathcal{P}(eAe)$, pues de lo contrario

$$\exists\ e' \in \mathcal{P}(eAe) \text{ tal que } \mu_v(e') < \mu(e')$$

por lo que $e' \in S$ y $S_0 \cup \{e'\} \in T$, de donde $e' \in S_0 \cup \{e'\} = S_0$ y por lo tanto $e' = 0$!!

$\square$

eAe

Teorema ([3])

Sean $A_1 \subset B(H_1)$ *y* $A_2 \subset B(H_2)$ *álgebras de von Neumann. Si* $\pi : A_1 \longrightarrow A_2$ *es un homomorfismo ultradébilmente continuo, entonces* $\pi(A_1) \subseteq A_2$ *es un álgebra de von Neumann.*

Corolario

Sea $A \subseteq B(H)$ *un álgebra de von Neumann y* $e \in \mathcal{P}(A) \setminus \{0\}$*. Entonces* $eAe \subseteq B(e(H))$ *es un álgebra de von Neumann.*

Teorema ([3])

Sean $A_1 \subset B(H_1)$ *y* $A_2 \subset B(H_2)$ *álgebras de von Neumann. Si* $\pi : A_1 \longrightarrow A_2$ *es un homomorfismo ultradébilmente continuo, entonces* $\pi(A_1) \subseteq A_2$ *es un álgebra de von Neumann.*

Corolario

Sea $A \subseteq B(H)$ *un álgebra de von Neumann y* $e \in \mathcal{P}(A) \setminus \{0\}$*. Entonces* $eAe \subseteq B(e(H))$ *es un álgebra de von Neumann.*

Demostración.

Consideremos el mapeo

$$\pi : A \longrightarrow eAe \subset B(e(H)), \qquad x \longmapsto exe$$

Sea $x_\alpha \xrightarrow{u.w.} x$ y $\sum_n ||v_n||^2 < \infty$, $\sum_n ||w_n||^2 < \infty$. Tenemos

$$\sum_n \langle \pi(x_\alpha)(v_n), w_n \rangle = \sum_n \langle x_\alpha e(v_n), e(w_n) \rangle \longrightarrow \sum_n \langle xe(v_n), e(w_n) \rangle = \sum_n \langle \pi(x)(v_n), w_n \rangle$$

$\therefore$ eAe es un álgebra de von Neumann. □

Redes

Sea X un espacio topológico.

Definición

*Una **red** es una función $f : J \longrightarrow X$, donde J es un c.p.o. tal que*

$$\forall \alpha, \beta \in J \quad \exists\, \gamma \in J \text{ tal que } \alpha \leq \gamma,\ \beta \leq \gamma$$

Denotamos $f(\alpha)$ por f_α y $f = (f_\alpha)_{\alpha \in J}$.

Definición

$x_\alpha \longrightarrow x$ si para toda vecindad U de x existe $\alpha \in J$ tal que $\alpha \leq \beta$ implica $x_\beta \in U$.

Propiedades

1. *Si X es Hausdorff, una red tiene a lo más un límite.*
2. $x \in \overline{A} \subseteq X \Longleftrightarrow \exists\, (x_\alpha)_\alpha \subset A$ *tal que* $x_\alpha \longrightarrow x$.
3. *Sea $f : X \longrightarrow Y$. Entonces f es continua $\Longleftrightarrow \forall (x_\alpha)_\alpha$ red en X tal que $x_\alpha \longrightarrow x$ se tiene $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.*

Observación

1. $x_\alpha \longrightarrow x$ *en la topología ultrafuerte* $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_\alpha(v_n) - x(v_n)||^2 \longrightarrow 0 \quad \forall \sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||^2 < \infty$$

2. $x_\alpha \longrightarrow x$ *en la topología ultradébil* $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_\alpha(v_n) - x(v_n), w_n \rangle \longrightarrow 0 \quad \forall \sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||^2, \sum_{n=1}^{\infty} ||w_n||^2 < \infty$$

3. $x_\alpha \longrightarrow x$ *en la topología fuerte* $\Longleftrightarrow$

$$||x_\alpha(v) - x(v)|| \longrightarrow 0 \quad \forall v \in H$$

4. $x_\alpha \longrightarrow x$ *en la topología débil* $\Longleftrightarrow$

$$\langle x_\alpha(v) - x(v), w \rangle \longrightarrow 0 \quad \forall v, w \in H$$

Lema

Sea $A \subseteq B(H)$ un álgebra de von Neumann y sea $\mu : A \longrightarrow \mathbb{C}$ un estado completamente aditivo. Entonces $\mu| : A_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{C}$ es ultrafuertemente continuo.

Demostración.

Por el lema de Zorn, existe una colección maximal $\{(e_\alpha, v_\alpha)\}_\alpha$ tal que $e_\alpha \in \mathcal{P}(A)$ son mutuamente ortogonales y $\mu \leq \mu_{v_\alpha}$ cuando se restringen a $e_\alpha A e_\alpha$. Ahora sea $e = 1 - \sum e_\alpha$ y supongamos que $e \neq 0$.

- Sea $\tilde{\mu} : eAe \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\tilde{\mu}(exe) := \mu(x)\ \forall x \in A$. Entonces $\tilde{\mu}$ es un funcional lineal tal que

$$\tilde{\mu}(exe(exe)^*) = \mu(xeex^*) = \mu(xe(xe)^*) \geq 0 \quad \forall x \in A$$

- Sea $v \in H$ tal que $e(v) \neq 0$, luego $w = \frac{e(v)}{||e(v)||} \in e(H)$ satisface

$$||w||^2 = 1 = \mu(1) = \tilde{\mu}(e)$$

Entonces existe $f \in \mathcal{P}(eAe) \setminus \{0\}$ tal que $\tilde{\mu} \leq \mu_w$ cuando se restringen a $f(eAe)f$, de donde $\mu \leq \mu_v$ en fAf. Como $f \perp e_\alpha\ \forall \alpha$, se sigue por maximalidad que $f = e_\beta$ para algún β. Así $f = 0$!!

Sea $\varepsilon > 0$. Como $1 = \mu(1) = \sum_\alpha \mu(e_\alpha) = \sum_{i\geq 1} \mu(e_i)$, podemos elegir $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tales que

$$\mu(e_1) + \ldots + \mu(e_n) \geq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \tag{1}$$

Sea $q = 1 - (e_1 + \ldots + e_n)$, así que $\mu(q) \leq (\frac{\varepsilon}{2})^2$. Además

$$|\mu(x)| = \left|\mu(xq) + \sum_{i=1}^{n} \mu(xe_i)\right| \leq |\mu(xq)| + \sum_{i=1}^{n} |\mu(xe_i)| \tag{2}$$

Observemos que $(a, b) \longmapsto \mu(b^* a)$ define un semi-producto interno, luego

$$|\mu(b^* a)| \leq |\mu(b^* b)|^{1/2} |\mu(a^* a)|^{1/2} \qquad \forall a, b \in A$$

En particular, para $x \in A_{\leq 1}$ tenemos

$$|\mu(xq)| \leq |\mu(xx^*)|^{1/2} |\mu(q)|^{1/2} \leq ||xx^*|| \, \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otro lado

$$|\mu(xe_i)| \leq |\mu(1)|^{1/2} \mu(e_i x^* x e_i)^{1/2} \leq \mu_{v_i}(e_i x^* x e_i)^{1/2} = ||x(e_i(v_i))|| \tag{3}$$

Por (2) y (3), $|\mu(x)| < \varepsilon$ con $x \in A_{\leq 1} \cap \{x \in A : ||x(e_i(v_i))|| < \frac{\varepsilon}{2n} \ \forall i\}$.

$\square$

Proposición

Sea $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \mathbb{R}^+$ *una red sumable. Entonces el conjunto*

$$I_0 = \{\alpha \in J : \lambda_\alpha \neq 0\}$$

es a lo sumo numerable.

Demostración.

Sea

$$A_m = \left\{\alpha \in J : \lambda_\alpha \geq \frac{1}{m}\right\} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in A_m$, entonces

$$\sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha \geq \lambda_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_{\alpha_r} \geq \frac{r}{m}$$

Así $r \leq m \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha$ y por lo tanto $|A_m| \leq m \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha < \infty$.

Como $I_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, se sigue que I_0 es a lo sumo numerable. $\square$

Bibliografía

- J. Dixmier, von Neumann algebras. Vol. 27. Elsevier, 2011.
- G. Murphy, C^*-Algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990.
- Stratila, Serban, and L. Zsidó. Lectures on von Neumann algebras. Cambridge University Press, 2019. CRC Press, Florida, 1993.