Decimos que A es una álgebra si A es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, equipado con una multiplicación asociativa $A \times A \to A$, $x, y \mapsto xy$.

Sea A una álgebra. Una norma sobre A es una función $\|\cdot\|: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface los siguientes axiomas

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ si $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ (propiedad submultiplicativa).

Propiedades de norma sobre espacio vectorial

Una norma determina una métrica sobre A, a saber

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Diremos que A es completa si lo es con respecto a esta métrica.
Una álgebra de Banach es una álgebra normada completa.

* Consideraremos que A posee unidad. $(\exists e \in A, \ ex = x = xe \quad \forall x \in A)$

Ejemplo $C^0(X)$, funciones continuas sobre X espacio topológico compacto.

Ejemplo $B(H)$, operadores acotados sobre un espacio de Hilbert.

Ejemplo $L^1(G)$, funciones integrables sobre G con respecto a una medida de Haar. La multiplicación está dada por la convolución, donde G es un grupo localmente compacto.

$A^{-1} = Gl(A) = Inv(A)$ denotará al conjunto de elementos invertibles.

Proposición (A^{-1} es abierto) Sea A álgebra de Banach. Entonces la colección de elementos invertibles de A es abierto.

Demostración. 1) $\|\cdot\|$ es submultiplicativa $\Longrightarrow$ $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ para todo $n \geq 1$.

2) Serie absolutamente convergente $\Rightarrow$ convergencia.

3) Si $\|x\|<1 \overset{1)}{\Rightarrow} \sum_{j\geq 0} \|x^j\| \leq \sum_{j\geq 0} \|x\|^j < \infty$

$\overset{2)}{\Rightarrow} \sum x^j$ converge en A.

4) $$(1-x)(\sum x^j) = (1-x)\lim_{N\to\infty}\sum_0^N x^j = \lim_{N\to\infty}(1-x^{N+1}) \overset{1)}{=} 1$$

Con esto demostramos que si $\|x\|<1$ entonces $1-x$ es invertible.

5) Sean $x_0 \in A^{-1}$, $h\in A$. Si $\|x_0^{-1}h\|<1$, como

$$x_0+h = x_0(1+x_0^{-1}h)$$

$\Rightarrow x_0+h$ es invertible.

En particular si $\|h\| < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|} \Rightarrow \|x_0^{-1}h\| \leq \|x_0^{-1}\|\,\|h\| < 1$. $B(x_0, \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}) \subseteq A^{-1}$ ∎

Definición (espectro). Sean A álgebra de Banach, $x\in A$. El espectro de x es el conjunto

$$\sigma(x) := \{\lambda\in\mathbb{C} : x-\lambda \notin A^{-1}\}. \qquad (x-\lambda = x-\lambda e)$$

Corolario $\sigma(x)$ es cerrado.

Demostración. La función

$$\varphi_x : \mathbb{C} \longrightarrow A$$
$$\lambda \longmapsto x-\lambda$$

es continua, $\|x-\lambda_1-(x-\lambda_2)\| = \|\lambda_1-\lambda_2\| = |\lambda_1-\lambda_2|$.

por lo tanto $\sigma(x) = \varphi_x^{-1}(A\setminus A^{-1})$ es cerrado pues $A\setminus A^{-1}$ es cerrado. ∎

Proposición Sean A álgebra de Banach no trivial, $x\in A$. Entonces

$$\sigma(x)\neq\emptyset.$$

Demostración. Se prueba por contradicción. Suponer $\sigma(x)=\emptyset$.

1) $\forall \lambda_0\in\mathbb{C}$, $x-\lambda\in A^{-1}$,

$$\frac{(x-\lambda)^{-1}-(x-\lambda_0)^{-1}}{\lambda-\lambda_0} = \frac{(x-\lambda)^{-1}[(x-\lambda_0)-(x-\lambda)](x-\lambda_0)^{-1}}{x-\lambda} = (x-\lambda)^{-1}(x-\lambda_0)^{-1} \underset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} (x-\lambda_0)^{-2}$$

2) Sea $\varphi : A \to \mathbb{C}$ un funcional lineal continuo. La función

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \varphi((x-\lambda)^{-1}) \end{aligned}$$

es continua y holomorfa (en particular la derivada existe en λ_0)

$$\frac{\phi(\lambda)-\phi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = \frac{\varphi((x-\lambda)^{-1}) - \varphi((x-\lambda_0)^{-1})}{\lambda-\lambda_0} = \varphi\left((x-\lambda)^{-1}(x-\lambda_0)^{-1}\right) \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \varphi((x-\lambda_0)^{-2})$$

por lo tanto ϕ es entera.

3) $|\lambda| > 2\|x\|$ implica que

$$|\phi(\lambda)| \leq \|\varphi\| \, \|(x-\lambda)^{-1}\| \leq \|\varphi\| \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}$$

Por lo tanto ϕ es acotado y $|\phi(\lambda)| \to 0$ cuando $|\lambda| \to \infty$.
El teorema de Liouville implica que $\phi(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

4) Como φ fue arbitrario, el teorema de Hahn-Banach implica que $(x-\lambda)^{-1} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. ¡! ($\forall \varphi \in A^*$, $\varphi(z) = 0 \Rightarrow z = 0$).

∎

Corolario (Gelfand-Mazur) Sea A una álgebra de Banach de división. Entonces $A \simeq \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $x \in A$. Por lo anterior $\sigma(x) \neq \emptyset$. Sea $\lambda \in \sigma(x)$. Como A es álgebra de división, deducimos que $\lambda - x = 0$ por lo tanto $x = \lambda$.

∎

Corolario Sean A álgebra de Banach, y M un ideal maximal en A. Entonces el cociente $A/M \simeq \mathbb{C}$.

Demostración 1) $M = \text{clos}(M)$. Pues existe $U(1)$ vecindad abierta de 1 tal que $U(1) \cap M = \emptyset$. Se sigue que $1 \notin \text{clos} M \Rightarrow \text{clos}(M)$ es ideal propio contenido en A.

2) A/M es álgebra de Banach, más aún es un campo (en particular es álgebra de división)

Por el corolario de Gelfand-Mazur $A/M \simeq \mathbb{C}$.

∎

$\bar{x} \in A/M$, $\quad \|\bar{x}\|_{A/M} := \inf_{z \in M} \|x - z\|$ / $\begin{aligned} \psi : A/M &\to \mathbb{C} \\ \bar{x} &\to \lambda \in \sigma(\bar{x}) \end{aligned}$

Proposición $\sigma(x)$ es compacto.

Demostración. Si, $|\lambda| > \|x\|$, entonces $1-\frac{x}{\lambda}$ sería invertible

$$\lambda - x = \lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right) \in A^{-1} \quad \left(\lambda \notin \sigma(x), \text{ pues } \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1\right).$$

Es decir si $\lambda \in \sigma(x)$, $|\lambda| \leq \|x\|$. $\Rightarrow \sigma(x) \subseteq B(0, \|x\|)\Big)$ ∎

Definición (radio espectral). Sea A álgebra de Banach. Para $x \in A$ se define el radio espectral de x como el número

$$\rho(x) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Teorema (fórmula del radio espectral, Gelfand). Sean A álgebra de Banach, $x \in A$. Entonces

$$\rho(x) = \limsup_{n \geq 0} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Corollary Sean A una álgebra de Banach, $\omega : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras. Entonces $\|\omega\| \leq 1$.

$$\left(\begin{array}{l} \omega(x+\alpha y) = \omega(x) + \alpha\,\omega(y) \\ \omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \\ \omega(1) = 1 \quad \Rightarrow \|\omega\| = 1 \end{array}\right)$$

Demostración.

Tomar $x \in A$, por mostrar que $|\omega(x)| \leq \|x\|$. Suponer lo contrario,

$$|\omega(x)| > \|x\| \geq \rho(x)$$

por lo tanto $\omega(x) - x \in A^{-1}$. Pero $\omega\big(\omega(x) - x\big) = 0 \in \mathbb{C}$. ⚡ ∎

Nota: $xx^{-1} = 1$
- $\omega(xx^{-1}) = \omega(1) = 1$
- $\omega(x)\cdot\omega(x^{-1}) = 1$

Definición (espectro de A, spec A). Sea A una álgebra conmutativa de Banach. El espectro de A es la colección de $\omega : A \to \mathbb{C}$ álgebra homomorfismos, y se denota por Spec A. También se le conoce como espectro de Gelfand. (Se impone la condición: $\omega \equiv 0 \notin \operatorname{spec} A$.)

Nota:
- $\omega \in \operatorname{Spec} A$ es un funcional lineal acotado multiplicativo.
- $\omega(1) = 1 \Rightarrow \|\omega\| = 1$.

Algunas propiedades del espectro de Gelfand

Sea A álgebra de Banach conmutativa y $x \in A$. Entonces

1. $\sigma(x) = \{\omega(x) : \omega \in \operatorname{Spec}(A)\}$;
2. $\operatorname{Spec}(A) \subseteq \prod_{x \in A} \sigma(x)$ (topología producto).
3. $\operatorname{Spec}(A) \subseteq A'$ (dual de A), más aún es Hausdorff y compacto con la topología débil-*.

Las propiedades 2 y 3 se siguen de teorema de Banach-Alaoglu, $\overline{B(0,1)} \subseteq A^*$ es Hausdorff compacto con la topología débil-*.

Definición. Una $*$-álgebra es una álgebra A equipada con una función $x \mapsto x^*$ que satisface los siguientes axiomas:
involución

- $(xy)^* = y^* x^*$
- $(x+y) = x^* + y^*$
- $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
- $x^{**} = x$

Si A es de Banach y satisface $\|x x^*\| = \|x\|^2$, entonces se dice que A es álgebra C^*.

Ejemplos
- $\mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$.
- $C^0(X)$. X Hausdorff compacto, con involución $f \mapsto \bar{f}$.
- $B(H)$, $A \mapsto A^*$.

Definición (elementos auto-adjuntos o hermitianos).

Sea A una $*$-álgebra

- x es hermitiano o auto-adjunto si $x = x^*$.
- x es skew-hermitian si $x^* = -x$

  anti-hermitiano, casi-hermitiano

  anti-simétrico, sesqui-hermitiano
- x es normal si $x^* x = x x^*$.

Todo elemento $x \in A$ admite una descomposición $x = R(x) + \mathcal{I}(x)$ donde

$$R(x) = \frac{x + x^*}{2} \quad (\text{hermitiano}), \qquad \mathcal{I}(x) = \frac{x - x^*}{2} \quad (\text{sesqui-hermítico}).$$

Proposición. x es normal $\iff$ $R(x)\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(x) R(x)$.

Proposición. Sean A una C^*-álgebra y $x \in A$ normal. Entonces para todo $n \geq 1$

$$\|x^n\| = \|x\|^n .$$

Corolario Sea A una C^*-álgebra y $x \in A$ normal. Entonces el radio espectral coincide con la norma, $\rho(x) = \|x\|$.

Demostración. $\rho(x) = \lim\sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim\sup (\|x\|^n)^{\frac{1}{n}} = \lim\sup \|x\|$. ∎

Transformada de Gelfand

Sean A álgebra de Banach conmutativa. Para todo $x \in A$ se define la función

$$u(x) = \Gamma(x) = \hat{x} : \operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (\text{función de Gelfand})$$
$$\omega \longmapsto \omega(x) \quad ;$$

$\operatorname{Spec} A$ → es compacto y Hausdorff.

$$\Gamma = u : A \longrightarrow C^0(\operatorname{Spec} A)$$
$$x \longmapsto u(x) = \Gamma(x) = \hat{x} \quad .$$

Proposición Sea A álgebra C^* conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de álgebras C^*. (teorema espectral abstracto)

Demostración

- Morfismo

$$u(x + \lambda y)(\omega) = \widehat{x + \lambda y}(\omega) = \omega(x + \lambda y) = \omega(x) + \lambda\omega(y) = u(x)(\omega) + \lambda u(y)(\omega),$$

$$u(xy)(\omega) = \widehat{xy}(\omega) = \omega(xy) = \omega(x)\,\omega(y) = u(x)(\omega) \cdot u(y)(\omega),$$

- $u(x^*)(\omega) = \omega(x^*) = \dots = \overline{\omega(x)} = \overline{u(x)(\omega)}$,

- u es isométrico $\Rightarrow$ inyectividad

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^*(x^2)\| = \|x^* x^* x x\| = \|x^* x\, x^* x\| = \|(x^* x)^2\| = \|x^* x\|^2 = \|x\|^4$$

$\Rightarrow \quad \|x^2\| = \|x\|^2$

$\Rightarrow \quad r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|.$

Por otro lado

$$r(x) = \sup \{ |u(x)(\omega)| : \omega \in \operatorname{spec} A \} = \|u(x)\|_\infty$$

i.e., $\quad \|u(x)\|_\infty = \|x\|.$

- Sobreyectivo: usar Stone-Weierstrass, pues $u(A)$ es subálgebra cerrada, de $C(\operatorname{spec} A)$ que separa puntos. ∎

Corolario Toda álgebra C^* conmutativa es isomorfa isométrica a $C^0(X)$ para algún espacio Hausdorff compacto X. Más aún, podemos recuperar canónicamente X como el espectro $\operatorname{spec} A$.