§ Álgebras C^* - Continuación

<u>Recordatorio</u> Un álgebra C^* es un algebra de Banach $\mathcal{A}$ con unidad junto con:

$*$) Una función $x \mapsto x^*$ que satisface

$*1)$ $(xy)^* = y^* x^*$, $*2)$ $(x+y)^* = x^* + y^*$, $*3)$ $\lambda^* = \bar{\lambda}$ si $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\Rightarrow I^* = I?)$, $*4)$ $x^{**} = x$.

C^*) La norma (submultiplicativa) además satisface $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Si $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra, un elemento $x \in \mathcal{A}$ se dice hermitiano o auto adjunto si $x^* = x$.

decimos también que x es anti hermitiano o anti (auto) adjunto si $x^* = -x$.

Todo elemento $x \in \mathcal{A}$ admite una descomposición en la forma $x = R(x) + i I(x)$ donde

$$R(x) := \frac{x + x^*}{2} \text{ es auto adjunto, } iI(x) = \frac{x - x^*}{2} \text{ es anti adjunto.}$$

$iI(x) = \frac{x - x^*}{2}$ entonces $(iI(x))^* = \left(\frac{x - x^*}{2}\right)^* = \left(\frac{1}{2}\right)^* (x - x^*)^* = \frac{1}{2}(x^* - x) = -\frac{x - x^*}{2} = -iI(x)$

Decimos que $x \in \mathcal{A}$ es normal si $xx^* = x^* x$ $\big(\Leftrightarrow (R(x) + iI(x))(R(x) + iI(x))^* = (R(x) + iI(x))^* (R(x) + iI(x)) \Leftrightarrow$

$(R(x) + iI(x))(R(x)^* + (iI(x))^*) = (R(x)^* + (iI(x))^*)(R(x) + iI(x)) \Leftrightarrow (R(x) + iI(x))(R(x) - iI(x)) = (R(x) - iI(x))(R(x) + iI(x)) \Leftrightarrow$

$R(x)R(x) + iI(x)R(x) + R(x)(-iI(x)) + I(x)I(x) = R(x)R(x) - iI(x)R(x) + R(x)(iI(x)) + I(x)I(x) \Leftrightarrow$

$i(I(x)R(x) - R(x)I(x)) = i(R(x)I(x) - I(x)R(x)) \Leftrightarrow R(x)I(x) - I(x)R(x) = 0\big)$.

<u>Proposición.</u> Sea $\mathcal{A}$ una álgebra C^* y sea $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal, entonces $\|x^n\| = \|x\|^n$ para todo $n > 0$.

<u>Dem</u> 1) Probemos primero que $\|x^n\|^2 = \|x\|^{2n}$. Notemos que $\|x\|^{2n} = (\|x\|^2)^n = \|x^* x\|^n$ y $\|x^n\|^2 = \|(x^n)^* x^n\| = \|(x^*)^n x^n\| =$

$\|(x^* x)^n\|$ es decir $\|(x^* x)^n\| = \|x^* x\|^n$ where $(x^* x)^* = x x^* = x^* x$ i.e. $y = x^* x$ es hermitiano y obtenemos $\|y^n\| = \|y\|^n$.

Notemos también que si $y^* = y$ entonces $\|y\|^2 = \|y^* y\| = \|y^2\|$.

Suponemos que $\|y^{2^k}\| = \|y\|^{2^k}$, luego $\|y^{2^{k+1}}\| = \|y^{2^k 2}\| = \|y^{2^k} y^{2^k}\| = \|(y^* y)^{2^k}\| = \|y^* y\|^{2^k} = (\|y\|^2)^{2^k} = \|y\|^{2^{k+1}}$.

Así, para un $x \in \mathcal{A}$ normal se cumple $\|(x^* x)^{2^k}\| = \|x^* x\|^{2^k}$.

<u>Obs</u> $\|x\| = \|x^*\|$ pues $\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x^*\| \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x^*\|$ y $\|x^*\|^2 = \|x x^*\| \leq \|x\| \|x^*\| \Rightarrow \|x^*\| \leq \|x\|$ $\therefore$ $\|x\| = \|x^*\|$. Luego de

esto se concluye $\|x^* x\| = \|x\|^2 = \|x\| \|x^*\|$.

De lo anterior tenemos así $\|(x^* x)^{2^k}\| = \|x^* x\|^{2^k} = \|x^*\|^{2^k} \|x\|^{2^k} \Rightarrow \|x\|^{2^{k+1}} = \|x^*\|^{2^k} \|x\|^{2^k} = \|x^{*2^k} x^{2^k}\| \leq \|x^{*2^k}\| \|x^{2^k}\| \leq \|x\|^{2^k} \|x^{2^k}\|$

$\therefore \|x\|^{2^k} \leq \|x^{2^k}\| \Rightarrow \|x\|^{2^k} = \|x^{2^k}\|$.

Finalmente, si $m+n=2^k$ entonces $\|x\|^{m+n} = \|x^{m+n}\| = \|x^m x^n\| \leq \|x^m\| \|x^n\| \leq \|x\|^m \|x\|^n = \|x\|^{m+n}$

$\Rightarrow \|x\|^m \|x\|^n = \|x^m\| \|x^n\|$ y si $x \neq 0$ entonces $\|x\|^m = \|x^m\|$ ■

<u>Corolario</u> Sea $\mathcal{A}$ una álgebra C^* y sea $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal, entonces $\rho(x) = \|x\|$

<u>Dem</u> $\rho(x) = \liminf \|x^n\|^{1/n} = \liminf \|x\| = \|x\|$ por la fórmula del radio espectral de Gelfand ■

Para cualquier álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$, cada elemento $x \in \mathcal{A}$ determina un mapeo

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_x : \operatorname{Spec} \mathcal{A} := \operatorname{Hom}_{alg}(\mathcal{A}, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \mathcal{U}_x(\omega) := \omega(x). \quad \text{con} \quad \|\mathcal{U}_x\|_\infty = \|x\| \end{aligned}$$

Esto define un homomorfismo de álgebras $\mathcal{U} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}_0^0(\operatorname{Spec} \mathcal{A}; \mathbb{C})$ llamado la transformada de Gelfand.

<u>Proposición</u> Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa, entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{A} \to \mathcal{C}_0^0(\operatorname{Spec}\mathcal{A}; \mathbb{C})$ es un isomorfismo isométrico de álgebras C^*.

<u>Obs</u> En la prueba de que $\mathcal{U}$ es un $*$-homomorfismo se verifica que si $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es homomorfismo de álgebras entonces $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$ lo cual, al considerarse sobre elementos x hermitianos implica que $\omega(x) \in \mathbb{R}$ es decir $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.

$$\sigma(x) = \{ \underbrace{\omega(x)}_{\mathcal{U}_x(\omega)} \mid \omega \in \operatorname{Spec} \mathcal{A} \}$$

<u>Corolario</u> Toda álgebra C^* conmutativa $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{C}_0^0(X; \mathbb{C})$ para algún espacio compacto y Hausdorff X. Más aún es posible identificar canónicamente $X \approx \operatorname{Spec} \mathcal{A}$.

Este corolario sugiere que muchas propiedades de las funciones continuas pueden ser generalizadas a propiedades de elementos en un álgebra C^*.

<u>Definición</u> Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea $x \in \mathcal{A}$. Decimos que x es positivo (no negativo) si x es Hermitiano y $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

<u>Ejemplo</u> Sea $\mathcal{A} = \mathcal{C}_0^0(X; \mathbb{C})$ como álgebra C^* conmutativa, entonces una función $f \in \mathcal{C}_0^0(X; \mathbb{C})$ es un elemento positivo de $\mathcal{A}$ si y solo si $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, i.e. f es una función no negativa.

Para verificar esto basta mostrar que $\sigma(f) = \operatorname{Im}(f)$. Tomando $\alpha = f(x_0)$ con $x_0 \in X$ entonces $f - \alpha 1$ no es invertible $\Rightarrow \alpha \in \sigma(f)$. Ahora si $\alpha \notin \operatorname{Im}(f)$ entonces $(f - \alpha 1)(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ y continua entonces $(f - \alpha 1)^{-1}(x) \neq 0$ se puede definir y también es continua por lo que $f - \alpha 1$ es invertible $\Rightarrow \alpha \notin \sigma(f)$ ■

Aunque los elementos no negativos de un álgebra C^* pueden definirse aún cuando el álgebra sea no conmutativa buscaremos estudiar dichos elementos en subálgebras conmutativas para poder determinar algunas propiedades las cuales resultarán relevantes.

$C^*(x, \mathcal{Y})$

Si $x \in \mathcal{A}$ es autoadjunto (o normal) entonces la C^* subálgebra de $\mathcal{A}$ más pequeña que contiene a x es $\mathbb{1}$ conmutativa y por lo tanto de la forma $\mathcal{C}^0(X; \mathbb{C})$ para algún espacio compacto X.

<u>Proposición</u> Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* que contenga una C^* subálgebra $\mathcal{A}_0$. Para cada elemento Hermitiano $x \in \mathcal{A}_0$, el espectro de x no depende de si consideramos a x como elemento de $\mathcal{A}_0$ o como elemento de $\mathcal{A}$.

<u>Teorema</u> Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras de Banach con identidad común y tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, si tomamos $a \in \mathcal{B}$ ent: $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ y $\partial \sigma_{\mathcal{B}}(a) \subseteq \partial \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

<u>Dem</u> Si $\alpha \notin \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ entonces existe $b \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ t.q. $b(a - \alpha 1) = (a - \alpha 1)b = 1 \Rightarrow \alpha \notin \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ $\therefore \sigma_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(a)$.

Tomemos ahora $\lambda \in \partial \sigma_{\mathcal{B}}(a)$, como $\operatorname{Int}(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) \subseteq \operatorname{Int}(\sigma_{\mathcal{B}}(a))$ basta probar que $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Supongamos $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ entonces existe $x \in \mathcal{A}$ t.q. $(a - \lambda 1)x = x(a - \lambda 1) = 1$ pero como $\lambda \in \partial \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ en $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ t.q. $\lambda_n \to \lambda$. Notemos entonces $(a - \lambda_n 1)^{-1} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, además $(a - \lambda_n 1) \to (a - \lambda 1)$ luego $(a - \lambda_n 1)^{-1}(a - \lambda_n 1) \to x(a - \lambda 1)$ por lo que $(a - \lambda_n 1)^{-1} \to x$ (pues $x \mapsto x^{-1}$ es continua) entonces $x \in \mathcal{B}$ ya que $\mathcal{B}$ es completo $\#_c$.

<u>Dem de la Prop</u> Supongamos que a es hermitiano y sea $\mathcal{C} = C^*(a)$ el álgebra C^* generada por a y 1, entonces $C^*(a)$ es conmutativa entonces $\sigma_{\mathcal{C}}(a) \subseteq \mathbb{R}$, entonces por el teorema anterior $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \partial \sigma_{\mathcal{C}}(a) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a)$. Similarmente $\sigma_{\mathcal{A}_0}(a) \subseteq \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \partial \sigma_{\mathcal{C}}(a) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}_0}(a)$ y así $\sigma_{\mathcal{A}_0}(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ ✿

El siguiente corolario nos da más intuición de las características de los elementos no negativos en $\mathcal{A}$ y nos acerca al cálculo funcional en $\mathcal{A}$.

<u>Corolario</u> Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea $x \in \mathcal{A}$ un elemento Hermitiano, entonces x es un elemento no negativo si y solo si existe un elemento no negativo $y \in \mathcal{A}$ t.q. $x = y^2$. Si las condiciones se cumplen y es único.

<u>Dem</u> Si existe $y \in \mathcal{A}$ no negativo tal que $x = y^2$ así $x^* = (y^2)^* = (y^*)^2 = y^2 = x$. Consideremos $C^*(y)$ entonces es conmutativa y por lo tanto de la forma $\mathcal{C}^0(X)$ para algún espacio compacto X, entonces $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Supongamos ahora que $x \in A$ es no negativo y sea $B = C^*(x)$ entonces $B \simeq \mathcal{C}^0(Y)$ para algún espacio compacto Y y $x \underset{u}{\to} f_x \geq 0$
x corresponde a una función no negativa en Y. Entonces podemos escribir $x = y^2$ (como funciones $Y \to \mathbb{C}$) para un único elemento $y \in B$ no negativo. Si $y' \in A$ es otro elemento no negativo t.q. $y'^2 = x$. Tomando $C^*(y')$ la cual contiene a $x = y'^2$ y por tanto a $C^*(x)$ y por consiguiente a y) entonces como nuevamente $C^*(y')$ es conmutativa el resultado se sigue de la unicidad de las raíces positivas en $\mathbb{R}$. $\quad y'^2 = x = y^2 \quad yy' = y'y$

<u>Definición</u> Diremos que un elemento $x \in A$ es no positivo si $-x$ es no negativo. $\quad C^*(y', y)$

Notemos que si x es no negativo y no positivo entonces $\sigma(x) \subseteq (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \cap (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) = \{0\}$ de modo que $\|x\| = \rho(x) = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

<u>Proposición</u> (La descomposición ortogonal de $A_{\geq 0}$ los elementos no negativos de A).

Sea A un álgebra C^* y sea $x \in A$ un elemento Hermitiano. Entonces x puede ser escrito de forma única como $x = x_+ + x_-$ con $x_+ \in A$ no negativo, $x_- \in A$ no positivo y $x_+ x_- = x_- x_+ = 0$.

<u>Dem</u> De nuevo reducimos de ser necesario al caso conmutativo $C^*(x) \simeq \mathcal{C}^0(Y)$ para algún espacio compacto Y $\Rightarrow$ $f_x : Y \to \mathbb{R}$ y así podemos tomar

$$f_x^+(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } f(y) \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad f_x^-(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } f(y) \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente $f_x = f_x^+ + f_x^-$ y $f_x^+ f_x^- = 0 = f_x^- f_x^+$ (por tricotomía).

Para la unicidad, si $x = x_+' + x_-'$ sea x_+' no negativo, x_-' no positivo y $x_+' x_-' = 0 = x_-' x_+'$, si consideramos $C^*(x_+', x_-')$ esta de nuevo será una subalgebra conmutativa que contendrá a x y por tanto a x_+ y x_-, de donde la unicidad se sigue del caso de funciones).

El siguiente lema es un criterio útil para verificar no negatividad de elementos en A

<u>Obs.</u> Si X es un espacio compacto y $f \in \mathcal{C}^0(X; \mathbb{C})$ es no negativa (i.e. $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) entonces si $t \geq \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\} \Rightarrow \exists x_0 \in X$ t.q. $\|f\| = f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in X$. $\therefore$ $|f(x) - t| = t - f(x) \leq t$.

Por otro lado, si $|f(x) - t| \leq t$ para algún $t \geq \|f\|$ entonces si existe $y \in X$ t.q. $f(y) < 0 \Rightarrow 0 < -f(y) \Rightarrow$ $|f(y) - t| = t - f(y) > t$ $\#_c$.

Lema. Sea A un álgebra C^* y $x \in A$ Hermitiano, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1) x es no negativo

2) Para todo real $t \geq \|x\|$ se tiene $\|t - x\| \leq t$

3) Existe un número real $t_0 \geq \|x\|$ tal que $\|t_0 - x\| \leq t_0$

Dem. $3 \Rightarrow 1)$ Tomando $C^*(a)$ el cual es conmutativo, $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ y la funcion $\mathcal{C}^0(\sigma(a)) \to C^*(a)$ dada por $f \mapsto f(a)$ es un $*$-isomorfismo $(f(a) := \rho(f))$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & \mathcal{C}^0(\operatorname{Spec} A) \\ \mathcal{C}^0(\sigma(a)) \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "\tau^\#"'] \arrow[ur, phantom, "=" near start] & \end{tikzcd}$$

$\tau^\#(f)(\omega) := f(\omega(a))$

Entonces la condición $\|t_0 - a\| \leq t_0$ para algún $t_0 \geq \|a\| = \rho(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$ entonces para todo $\lambda \in \sigma(a)$, $|t_0 - \lambda| \leq t_0$ para algún $t_0 \geq \|a\| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\} = |\lambda_0|$

vía el isomorfismo isometrico de la transformada de Gelfand

Luego si tomamos $id_{\sigma(a)}(\lambda) = \lambda$ entonces se tiene $\lambda \geq 0$ $\forall \lambda \in \sigma(a)$ $\therefore$ a es no negativo.

$1 \Rightarrow 2)$ Se satisface pasando a $C^*(a) \cong \mathcal{C}^0(X; \mathbb{C})$ y con la discusión anterior. ∎

Proposición. Sea A un álgebra C^* y sean $x, y \in A$ elementos no negativos. Entonces $x+y$ es no negativo.

Dem. $(x+y)^* = x^* + y^* = x + y$. Tomemos ahora $c_1 \geq \|x\|$, $c_2 \geq \|y\|$ tales que $c_1 + c_2 \geq \|x + y\|$, entonces

$\|c_1 + c_2 - x - y\| = \|c_1 - x + c_2 - y\| \leq \|c_1 - x\| + \|c_2 - y\| \leq c_1 + c_2$ luego por el lema anterior

$x+y$ es no negativo.

Dem Probemos primero lo siguiente: Un elemento $x \in \mathcal{A}$ es invertible $\Leftrightarrow$ $x^{-1} \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$. Así supongamos que $x^{-1} \in \mathcal{A}$ y consideremos $C^*(x, x^{-1})$ el ideal [subálgebra C^*] generada por x, x^{-1} y 1 y $C^*(x)$ el ideal generado por x y 1. Notemos que $C^*(x)$ es conmutativa. Tomemos $\mathcal{A} = C^*(x, x^{-1})$, $\mathcal{A}_0 = C^*(x)$

La inclusión $i_{\mathcal{A}_0} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}$ induce la función $f : \operatorname{Spec} \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{A}_0$, $f(\omega)(x_0) := \omega \circ i_{\mathcal{A}_0}(x_0)$. Notemos que si existe $u \notin \operatorname{Im}(f)$ entonces $u : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{C}$ no se puede ver como $u_{x_0} = f(\omega)_{x_0} = \omega \circ i_{\mathcal{A}_0}(x_0)$ para ningún $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \in \operatorname{Spec} \mathcal{A}$.

Recordemos Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa y $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un homomorfismo no nulo entonces $\|\omega\| = 1$

↳ o morfismo de álgebras de Banach con unidad conmutativas

De esto modo se tiene $\sigma(x) = \{ \omega(x) \mid \omega \in \operatorname{Spec} \mathcal{A} \}$ y recordando que si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* se tiene entonces que $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$, es decir ω es un $*$-homomorfismo

Si tomamos $\Sigma := \{ \omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \mid \omega \not\equiv 0 \}$ con la topología débil* como subconjunto de $\mathcal{A}^*$. Σ con esta topología es llamado el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}$. Más aún Σ es un espacio compacto y Hausdorff y si $a \in \mathcal{A}$ entonces $\sigma(a) = \{ \omega(a) \mid \omega \in \Sigma \}$