TEOREMA DEL DOBLE CONMUTANTE de von Neumann

Josué Ramírez Ortega

28 de marzo de 2022

Seminario de Álgebras de von Neumann
Depto. de Matemáticas
CINVESTAV-IPN

TEOREMA DEL DOBLE CONMUTANTE de von Neumann.

En el álgebra $B(H)$ de operadores acotados en un espacio de Hilbert, el teorema relaciona la estructura algebraica con dos topologías localmente convexas.

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ junto con una topología $\mathcal{T}$ tal que las operaciones

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$$

son continuas, donde $V\times V$ y $\mathbb{F}\times V$ tienen las topologías producto y $\mathbb{F}$ tiene la topología usual.

Teorema Sea V espacio vectorial de dimensión finita. Existe sólo una topología Hausdorff que hace de V un espacio vectorial topológico.

El teorema anterior no se cumple en dimensión infinita.

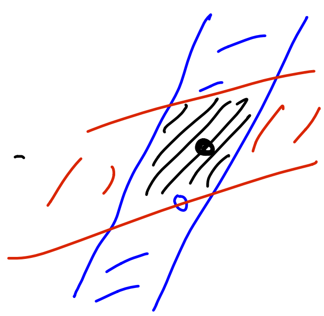
Definición Una seminorma en V es una función $p : V \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ tal que

1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{F},\ x \in V.$

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y.$

Supongamos que $\{p_j\}_{j \in J}$ es una familia de seminormas en V. Entonces V es un espacio vectorial topológico donde las vecindades básicas de $x_0 \in V$ son de la forma

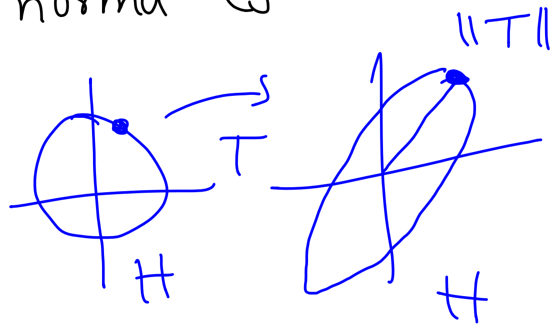
$$\bigcap_{k=1}^{m} \{x : p_{j_k}(x - x_0) < \varepsilon\}.$$



TOPOLOGIAS EN B(H).

Sea H un espacio de Hilbert y $B(H)$ el álgebra C^* de operadores acotados en H.
Para cada $T \in B(H)$, su norma es

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$



Desde luego

1) $\|T\| \geq 0$,
2) $\|T\| = 0$ si y sólo si $T = 0$,
3) $\|\lambda T\| = |\lambda| \, \|T\|$,
4) $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

La norma en $B(H)$ define la topología uniforme en $B(H)$.

La topología SOT (strong operator topology) en $B(H)$ está definida por la colección de seminormas

$$P_x(T) = \|Tx\|, \qquad x \in H.$$

La topología SOT es la de convergencia puntual. Esto es, una sucesión $\{T_n\}$

converge a T si para cada $x \in H$

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x; \qquad \lim_{n\to\infty} \|Tx - T_n x\| = 0$$

La topología WOT (weak operator topology) en $B(H)$ está definida por las seminormas

$$P_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle|, \qquad x, y \in H.$$

Denotamos las topologías uniforme, fuerte y débil por $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_s$ y $\mathcal{T}_w$, respectivamente.

Se cumple que

$$\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}.$$

Esta es una forma de decir que la aplicación identidad en $B(H)$ con las topologías indicadas

$$id : (B(H), \mathcal{T}_s) \longrightarrow (B(H), \mathcal{T}_w)$$

$$id : (B(H), \mathcal{T}) \longrightarrow (B(H), \mathcal{T}_s)$$

es continua pues

$$\underbrace{P_{x,y}(T-T_0)}_{\text{Vecindad en } T_w} = |\langle (T-T_0)x, y\rangle| \leq \|(T-T_0)x\| \|y\| = \underbrace{P_x(T-T_0)\, \|y\| < \varepsilon}_{\text{define vecindad en } T_S}$$

y

$$\underbrace{P_x(T-T_0)}_{\text{Vecindad en } T_S} = \|(T-T_0)x\| \leq \|\underbrace{T-T_0\| \|x\| < \varepsilon}_{\text{define vecindad en } T}$$

<u>Proposicion</u> La multiplicacion

$$B(H) \times B(H) \longrightarrow B(H)$$
$$(T, S) \longmapsto TS$$

es continua con la topologia uniforme y es continua en cada variable con las topologias fuerte y débil.

<u>Dem</u> Respecto a la topología uniforme, la continuidad se sigue de la propiedad $\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$:

$$\|TS - T_0S_0\| = \|TS - TS_0 + TS_0 - T_0S_0\|$$

$$\leq \|T\| \|S-S_0\| + \|S_0\| \|T-T_0\| < \varepsilon$$

Respecto a la topología débil, y la continuidad en el segundo factor,

$$P_{x,y}(T_0S - T_0S_0) = |\langle T_0(S-S_0)x, y\rangle|$$

$$= |\langle (S - S_0)x, T_0^* y \rangle|$$

$$= p_{x, T_0^* y}(S - S_0) < \varepsilon.$$

Respecto a la topología fuerte y la continuidad en el segundo factor,

$$p_x(T_0 S - T_0 S_0) = \| T_0 (S - S_0) x \|$$

$$\leq \|T_0\| \, \|(S - S_0)x\|$$

$$= \|T_0\| \, p_x(S - S_0) < \varepsilon.$$

<u>Proposición</u> La involución $T \mapsto T^*$ es continua respecto a la topología uniforme y la topología débil.

<u>Dem</u> La involución es una isometría

$$\|T\| = \|T^*\|$$

de donde se sigue la continuidad con la topología uniforme. En realidad la propiedad $\|T^* T\| = \|T\|^2$ implica que $\|T^*\| = \|T\|$ pues

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| \Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\|$$

y

$$\|T^*\| \leq \|(T^*)^*\| = \|T\|.$$

7

En cuanto a la continuidad en la topología débil,

$$\underbrace{P_{x,y}(T^* - T_0^*)}_{\text{Vecindad de } T_0^*} = |\langle (T^* - T_0^*)x, y\rangle|$$

$$= |\langle x, (T-T_0)y\rangle|$$

$$= |\langle (T-T_0)y, x\rangle|$$

$$= \underbrace{P_{y,x}(T-T_0)}_{\text{define vecindad de } T_0 \text{ en } \tau_w} < \varepsilon \quad \boxed{|a|}$$

En general la involución no es continua respecto a la topología fuerte. Tomamos

$$H = \ell^2 = \{a = (a_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Sea $T_n : H \to H$ dado por

$$T_n(a_1, a_2, \dots) = (a_n, a_{n+1}, \dots).$$

Entonces

$$T_n \xrightarrow{SO} 0$$

pero T_n^* no converge a cero en la topología fuerte porque $\|T_n^*(a_1, a_2 \dots\| = \|(a_1, a_2, \dots\|$

$$T_n^*(a_1, a_2, \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}, a_1, a_2, \dots).$$

Lema Si W es un subespacio invariante de $T \in B(H)$, entonces $\overline{W}$ también es invariante bajo T. $x \in \overline{W}$

Dem. Si $x = \lim x_n$, con $x_n \in W$, entonces $Tx = \lim Tx_n \in \overline{W}$. ▨ $Tx_n \in W$

Lema Sea W un subespacio cerrado y $P: H \to W$ la proyección ortogonal sobre W. Los espacios W y $W^\perp$ son invariantes bajo $T \in B(H)$ si y sólo si T conmuta con P.

Dem. Supongamos que $PT = TP$. Si $x \in W$, entonces $Tx = TPx = PTx \in W$. Si $x \in W^\perp$, entonces $Tx = T(I-P)x = (I-P)Tx \in W^\perp$.

Ahora supongamos que W y $W^\perp$ son invariantes bajo T. Para $x \in H$ se tiene

$TPx \in W$, así $P(TPx) = TPx$. Esto es, $PTP = TP$. Como $W^\perp$ también es invariante bajo T,

$$(I-P)T(I-P) = T(I-P).$$

$$PTP = PT.$$

Por lo tanto, $PT = PTP = TP$. ∎

Lema Si W es invariante bajo $T \in B(H)$, entonces $W^\perp$ es invariante bajo T^*.

Lema Sea $\mathcal{A} \subset B(H)$ una $*$-subálgebra con $I \in \mathcal{A}$. Si $T_0 \in \mathcal{A}''$ y $v \in H$, entonces

$$T_0 v \in W = \overline{\mathcal{A}v}.$$

<u>Dem</u>. $\mathcal{A}v = \{Tv : T \in \mathcal{A}\}$ es invariante bajo $\mathcal{A}$:

$$Tv \in \mathcal{A}v \ \& \ S \in \mathcal{A} \Rightarrow S(Tv) = (ST)v \in \mathcal{A}v$$

Por lo tanto W es invariante bajo $\mathcal{A}$. También $W^\perp$ es invariante bajo $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Sea P la proyección ortogonal de H sobre W. Entonces $P \in \mathcal{A}'$ debido a que W y $W^\perp$ son invariantes de $\mathcal{A}$.

$$T_0 v \approx Tv \ , \quad T \in \mathcal{A}$$

Como $T_0 \in \mathcal{A}''$, entonces $PT_0 = T_0 P$.

Así $PT_0 v = T_0 P v$, $\quad v \in W = \overline{\mathcal{A}v}$ $\quad v = Iv$

$= T_0 v$.

Por lo tanto, $T_0 v \in W = \overline{\mathcal{A}v}$.

PROPOSICIÓN Sea $\mathcal{A} \subset B(H)$ una $*$-subálgebra. Entonces $\mathcal{A}$ es densa en $\mathcal{A}''$ respecto a la topología fuerte.

Demostración. Sea $T_0 \in \mathcal{A}''$. Tomemos una $\mathcal{T}_s$-vecindad de T_0:

$$U = \bigcap_{j=1}^{n} \{T : p_{v_j}(T-T_0) = \|Tv_j - T_0 v_j\| < \varepsilon\}.$$

Veremos que existe $T \in U \cap \mathcal{A}$. Consideremos el caso $n=1$. Ya se vio que $T_0 v_1 \in \overline{\mathcal{A}v_1}$. Esto significa que existe $T \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|Tv_1 - T_0 v_1\| < \varepsilon.$$

En el caso general, se toma

$$H^{\oplus n} = H \oplus \cdots \oplus H.$$

El álgebra $B(H^{\oplus n})$ está formada por matrices

$$(T_{jk}) = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix}, \quad T_{jk} \in B(H).$$

Se encaja el álgebra $\mathcal{A}$ en $B(H^{\oplus n})$ mediante

$$\mathcal{A} \ni T \mapsto \tilde{T} = \begin{pmatrix} T & & \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix} =: \operatorname{diag}\{T, \dots, T\}.$$

Sea $\tilde{\mathcal{A}}$ la imagen, la cual es isomorfa a $\mathcal{A}$.

Usemos el hecho de que

$$\tilde{T}_0 = \operatorname{diag}\{T_0, \dots, T_0\} \in \tilde{\mathcal{A}}'',$$

auque la justificación viene abajo.

Para $(v_1, \dots, v_n) \in H^{\oplus n}$, por la primera parte de la prueba, existe

$$\tilde{T} = \operatorname{diag}\{T, \dots, T\} \in \tilde{\mathcal{A}} \quad (T \in \mathcal{A})$$

tal que

$$(*) \qquad \| \tilde{T}(v_1, \dots, v_n) - \tilde{T}_0 (v_1, \dots, v_n) \| < \varepsilon.$$

Básicamente aquí concluye la prueba.

Veamos que $\boxed{\tilde{T}_0 \in \tilde{\mathcal{A}}''}$.

Si $R = (R_{jk}) \in \tilde{\mathcal{A}}'$, entonces $R\tilde{A} = \tilde{A} R$ $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{pmatrix} R_{11}A & \cdots & R_{1n}A \\ \vdots & & \\ R_{n1}A & \cdots & R_{nn}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AR_{11} & \cdots & AR_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ AR_{n1} & \cdots & AR_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $R_{jk} \in \mathcal{A}'$, es decir $\tilde{\mathcal{A}}' \subset M_n(\mathcal{A}')$. Es fácil ver la otra contensión, Así

$$\boxed{\tilde{\mathcal{A}}' = M_n(\mathcal{A}').}$$

Sea $S=(S_{jk})\in\tilde{A}''$. En particular, S conmuta con $\operatorname{diag}\{R,\dots,R\}$ para cada $R\in A'$:

$$RS_{jk}=S_{jk}R \quad \forall R\in A',\ \forall j,k.$$

Luego $S_{jk}\in A''$. Por lo tanto

$$\tilde{A}''\subset M_n(A'').$$

De modo general, S conmuta con cada $R=(R_{jk})\in\tilde{A}'=M_n(A')$. Tomamos

$$R=\begin{pmatrix} 0 & & \vdots & & 0 \\ & \cdots & I & \cdots & \\ 0 & & \vdots & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } j$$

columna k

Entonces $RS=SR$ implica que

$$\text{fila } j \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \\ S_{k1} & \cdots & S_{kn} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & S_{1j} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & S_{nj} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

columna k

De aquí se deduce que $S_{kk} = S_{jj}$ y que $S_{jk} = 0$ para $j \neq k$. Esto es

$$\boxed{\tilde{A}'' = \left\{ \begin{pmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S \end{pmatrix} : S \in A'' \right\}.}$$

Dado que $T_0 \in A''$,

$$\tilde{T}_0 = \operatorname{diag}\{T_0, \dots, T_0\} \in \tilde{A}''.$$

Finalmente $(*)$ toma la forma

$$\| (Tv_1, \dots, Tv_n) - (T_0 v_1, \dots, T_0 v_n) \| < \varepsilon$$

o bien

$$\sum_{j=1}^{n} \| (T - T_0) v_j \|^2 < \varepsilon^2,$$

de donde $\| (T - T_0) v_j \| < \varepsilon$, $j = \overline{1, n}$.

Así $T \in \operatorname{Un} A$.

[signature]

Teorema Sea $\mathcal{A}$ una $*$-subálgebra de $B(H)$. Las siguientes son equivalentes:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$,
2) $\mathcal{A}$ es τ_w-cerrada,
3) $\mathcal{A}$ es τ_s-cerrada.

Demostración. La implicación 2) $\Rightarrow$ 3) es una reafirmación de $\tau_w \subset \tau_s$.

Veamos que 1) $\Rightarrow$ 2). Fijo $T \in \mathcal{A} = \mathcal{A}''$, la aplicación

$$\phi : S \longmapsto ST - TS$$

es τ_w-continua. Como la topología τ_w es Hausdorff, $\{0\}$ es τ_w-cerrado. Por lo tanto, el conjunto

$$\{T\}' = \{S : ST - TS = 0\} = \phi^{-1}(\{0\}).$$

es τ_w-cerrado. Entonces

$$\mathcal{A}' = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} \{S : ST - TS = 0\}$$

es τ_w-cerrado. Así

$A = A''$ es $\mathcal{T}_w$-cerrado.

Ahora veamos que 3) $\Longrightarrow$ 1)..

Supongamos que A es $\mathcal{T}_s$-cerrada.

Como A es $\mathcal{T}_s$-densa en A'', entonces

$$A = \overline{A}^{\mathcal{T}_s} = A''.$$

cerradura respecto a $\mathcal{T}_s$.

$\blacksquare$

Definición Se dice que A es una álgebra de von Neumann si cumple cualquiera de la condiciones del teorema.

OTRAS TOPOLOGIAS

La topología ultrafuerte en $B(H)$ está definida por las seminormas

$$p(T) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \| T v_j \|^2},$$

donde $\sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 < \infty$. Un sistema de vecindades de T_0 está dado por los conjuntos de la forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| (T - T_0) v_i \|^2 < \varepsilon.$$

NOTA No es necesario tomar intersecciones de este tipo de vecindades, el conjunto de seminormas es "saturado".

La topología ultradébil en $B(H)$ está definida por las seminormas

$$p(T) = \sum_{j=1}^{\infty} | \langle T v_j, w_j \rangle |,$$

donde $\sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 < \infty$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \|W_j\|^2 < +\infty$.

Denotamos las topologías ultrafuerte y ultradébil por $\mathcal{T}_s^u$ y $\mathcal{T}_w^u$, respectivamente.

Se tiene que

$$\sum_j |\langle T v_j, w_j \rangle| \leq \sqrt{\sum_j \|T v_j\|^2} \sqrt{\sum_j \|w_j\|^2}$$

lo cual dice que la aplicación identidad

$$id : (B(H), \mathcal{T}_s^u) \longrightarrow (B(H), \mathcal{T}_w^u)$$

es continua en 0, y por lo tanto es continua. Es decir, $\mathcal{T}_w^u \subset \mathcal{T}_s^u$.

También se cumple que

$$\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_w^u,$$

$$\mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}_s^u.$$

PROPOSICIÓN Sea $\mathcal{A} \subset B(H)$ una $*$-subálgebra. y $T_0 \in \mathcal{A}''$. Dado $\varepsilon > 0$ y $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 < +\infty$, existe $T \in \mathcal{A}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|(T - T_0) v_j\|^2 < \varepsilon.$$

<u>Dem</u> La prueba es análoga a la prueba de la proposición de arriba. Se toma la suma directa infinita

$$\mathcal{H} = H \oplus H \oplus \cdots$$

cuyos elementos son sucesiones $(v_1, v_2, \cdots)$ tales que $\sum_j \|v_j\|^2 < +\infty$. Sea realiza el encajè

$$\mathcal{A} \ni T \longmapsto \operatorname{diag}\{T, T \cdots\} \in B(\mathcal{H}).$$

Se continua de manera análoga. ///

Teorema Sea $\mathcal{A} \subset B(H)$ una $*$-subálgebra. Las siguientes son equivalentes

1) $\mathcal{A}$ es una álgebra de von Neumann
2) $\mathcal{A}$ es $\mathcal{T}_w^u$-cerrada,
3) $\mathcal{A}$ es $\mathcal{T}_s^u$-cerrada.

Demostración $2) \Rightarrow 3)$ es consecuencia de $\mathcal{T}_w^u \subset \mathcal{T}_s^u$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ es una álgebra de von Neumann. Entonces $\mathcal{A}$ es $\mathcal{T}_w$-cerrada. Como $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_w^u$, entonces $\mathcal{A}$ es $\mathcal{T}_w^u$-cerrada. Esto demuestra que $1) \Rightarrow 2)$.

Finalmente, supongamos que $\mathcal{A}$ es $\mathcal{T}_s^u$-cerrada. La proposición anterior dice que $\mathcal{A}$ es $\mathcal{T}_s^u$-densa en $\mathcal{A}''$. Además $\mathcal{A}''$ es $\mathcal{T}_s^u$-cerrada porque el producto es $\mathcal{T}_s^u$-continuo en cada variable. Así $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}^{\mathcal{T}_s^u} = \mathcal{A}''$. ∎

Referencias

1) Bosch-Giral C.; Fernández-Bermejo E. Análisis Funcional I, UNAM, 1989.

2) Murphy G. J.; C*-Algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990.

3) Zhu, K.; An introduction to Operator Algebras, CRC Press, 1993.

4) Dixmier J.; Von Neumann Algebras, North-Holland, 1981.

8) Kadison R.V.; Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol I, Academic Press, 1983.