Álgebras de Von Neumann (Lectura 6)

Definición

Sea H un espacio de Hilbert. Para cualesquiera $v, w \in H \setminus \{0\}$, introducimos un símbolo formal $e_{v,w}$. Denotamos

$$X := \left\{ \sum_{v,w \in H \setminus \{0\}} \lambda_{v,w} e_{v,w} : \sum_{v,w} |\lambda_{v,w}| \, ||v|| \, ||w|| < \infty \right\}$$

Definimos una norma

$$\left\| \sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w} \right\| := \sum_{v,w} |\lambda_{v,w}| \, ||v|| \, ||w||$$

Por convención $e_{v,w} = 0 \in X$ si $v = 0$ o $w = 0$.
Para $v, w \in H$, definimos a $\rho(e_{v,w}) \in B(H)$ por

$$\rho(e_{v,w})(x) := \langle x, w \rangle v \qquad \forall x \in H.$$

Operadores de clase traza

Observación

$$||\rho(e_{v,w})(x)|| = |\langle x, w\rangle| \, ||v|| \leq ||x|| \, ||w|| \, ||v|| \Longrightarrow ||\rho(e_{v,w})|| \leq ||v|| \, ||w||$$

Además

$$||w||^2||v|| = ||\rho(e_{v,w})(w)|| \leq ||\rho(e_{v,w})|| \, ||w|| \Longrightarrow ||v|| \, ||w|| \leq ||\rho(e_{v,w})||$$

En consecuencia, podemos extender a ρ:

$$\rho : X \longrightarrow B(H), \qquad \rho\left(\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}\right) := \sum_{v,w} \lambda_{v,w} \rho(e_{v,w})$$

$$||\rho\left(\textstyle\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}\right)|| \leq ||\textstyle\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}|| \quad \Longrightarrow \quad ||\rho|| \leq 1.$$

Operadores de clase traza

Observación

$$||\rho(e_{v,w})(x)|| = |\langle x, w\rangle| \; ||v|| \leq ||x|| \; ||w|| \; ||v|| \Longrightarrow ||\rho(e_{v,w})|| \leq ||v|| \; ||w||$$

Además

$$||w||^2||v|| = ||\rho(e_{v,w})(w)|| \leq ||\rho(e_{v,w})|| \; ||w|| \Longrightarrow ||v|| \; ||w|| \leq ||\rho(e_{v,w})||$$

En consecuencia, podemos extender a ρ:

$$\rho : X \longrightarrow B(H), \qquad \rho\left(\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}\right) := \sum_{v,w} \lambda_{v,w} \rho(e_{v,w})$$

$$||\rho\left(\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}\right)|| \leq ||\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}|| \quad \Longrightarrow \quad ||\rho|| \leq 1.$$

Definición

$$B^{tc}(H) := Im(\rho) \subset B(H)$$

Decimos que $f \in B(H)$ es de **clase traza** *(trace-class) si $f \in B^{tc}(H)$.*

Observación

Para todo $\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w} \in X$, *tenemos*

$$\rho\left(\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}\right) = \rho\left(\sum_{v,w} e_{\mu_{v,w}\left(\frac{|\lambda_{v,w}|\ ||w||}{||v||}\right)^{1/2} v, \left(\frac{|\lambda_{v,w}|\ ||v||}{||w||}\right)^{1/2} w}\right)$$

donde $\lambda_{v,w} = \mu_{v,w}|\lambda_{v,w}|$ *con* $|\mu_{v,w}| = 1$. *Se sigue que todo elto. de* $B^{tc}(H)$ *puede ser escrito como*

$$\rho\left(\sum_i e_{v_i', w_i'}\right)$$

donde $\{v_i'\}_i$ *y* $\{w_i'\}_i$ *son sucesiones satisfaciendo*

$$\sum_i ||w_i'||^2 = \sum_i ||v_i'||^2 = \sum_i |\lambda_{v_i,w_i}|\ ||v_i||\ ||w_i|| < \infty \tag{1}$$

Al revés, cada una de las sumas (1) determina $\rho(\sum_i e_{v_i,w_i}) \in B^{tc}(H)$.

$$\therefore \rho(X) = \left\{\rho\left(\sum e_{v_i,w_i}\right) : \sum ||v_i||^2 < \infty,\ \sum ||w_i||^2 < \infty\right\} \subset B(H)$$

Proposición

Sean $f \in B^{tc}(H)$ *y* $g \in B(H)$. *Entonces* $f^*, fg, gf \in B^{tc}(H)$.

Demostración.

Para $x, y \in H \setminus \{0\}$, notemos que

$$\begin{aligned}\left\langle \rho\left(\sum \lambda_{v,w} e_{v,w}\right)(x), y \right\rangle &= \sum \lambda_{v,w} \langle \langle x, w\rangle v, y\rangle = \sum \lambda_{v,w} \langle v, y\rangle \langle x, w\rangle \\ &= \left\langle x, \sum \overline{\lambda_{v,w}} \langle y, v\rangle w \right\rangle = \left\langle x, \rho\left(\sum \overline{\lambda_{v,w}} e_{w,v}\right)(y)\right\rangle\end{aligned}$$

Además

$$g \circ \rho\left(\sum \lambda_{v,w} e_{v,w}\right)(x) = \sum \lambda_{v,w} \langle x, w\rangle g(v) = \rho\left(\sum \lambda_{v,w} e_{g(v),w}\right)(x)$$

Así, si $f = \rho(\sum \lambda_{v,w} e_{v,w})$, tenemos

$$f^* = \rho\left(\sum \overline{\lambda_{v,w}} e_{w,v}\right), gf = \rho\left(\sum \lambda_{v,w} e_{g(v),w}\right) \in B^{tc}(H)$$

También $fg = \rho\left(\sum \lambda_{v,w} e_{v,g^*(w)}\right) \in B^{tc}(H)$. $\square$

Operadores compactos

Sea H un espacio de Hilbert. Un operador lineal $f : H \longrightarrow H$ se dice **compacto** si para todo subconjunto acotado $M \subset H$, la imagen $f(M)$ es relativamente compacta.

Proposición ([2])

1. *Los operadores compactos son acotados.*
2. *Los operadores de rango finito son compactos.*

Teorema ([2] Teorema espectral)

Sea $f \in B(H)$ compacto y autoadjunto. Entonces existe una base ortonormal $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores propios de f con correspondientes valores propios $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n \qquad \forall x \in H.$$

Observación

Sea $f \in \mathcal{K}(H)$ *tal que* $f = f^*$. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *base o.n. de vectores propios de* f *con correspondientes valores propios* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \rho(e_{x_n,x_n})$$

Así $\left\| \rho\left(\sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_{x_n,x_n}\right) - f \right\| \longrightarrow 0$ *y por lo tanto* $\mathcal{K}(H) = \overline{B^{tc}(H)}$.
Sin embargo, $\overline{B^{tc}(H)} = B(H)$ *con respecto a cualquiera de las otras topologías (ultrafuerte, ultradébil, débil).*

Observación

Sea $f \in \mathcal{K}(H)$ *tal que* $f = f^*$. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *base o.n. de vectores propios de* f *con correspondientes valores propios* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \rho(e_{x_n,x_n})$$

Así $\left|\left|\rho\left(\sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_{x_n,x_n}\right) - f\right|\right| \longrightarrow 0$ *y por lo tanto* $\mathcal{K}(H) = \overline{B^{tc}(H)}$.
Sin embargo, $\overline{B^{tc}(H)} = B(H)$ *con respecto a cualquiera de las otras topologías (ultrafuerte, ultradébil, débil).*

Definición

El isomorfismo $B^{tc}(H) \cong X/ker(\rho)$ *determina una norma sobre* $B^{tc}(H)$, *conocida como* **la norma de clase traza**

$$||\rho(x)||_1 := ||x + ker(\rho)|| = \text{ínf}\left\{||\sum \lambda_{v,w} e_{v,w}|| : \sum \lambda_{v,w} e_{v,w} \in x + ker(\rho)\right\}$$
$$= \text{ínf}\left\{\sum |\lambda_{v,w}|\ ||v||\ ||w|| : \rho(x) = \rho\left(\sum \lambda_{v,w} e_{v,w}\right)\right\}$$

Definición

Sea $f \in B(H)$. Definimos un funcional lineal

$$\chi_f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \chi_f\left(\sum_{v,w} \lambda_{v,w} e_{v,w}\right) = \sum_{v,w} \lambda_{v,w} \langle f(v), w\rangle$$

Proposición

Para $f \in B(H)$, $||\chi_f|| = ||f||$

Demostración.

Dados $v, w \in H$, tenemos

$$|\sum \lambda_{v,w} \langle f(v), w\rangle| \leq \sum |\lambda_{v,w}| \, |\langle f(v), w\rangle| \leq ||f|| \sum |\lambda_{v,w}| \, ||v|| \, ||w||$$

Por lo tanto $||\chi_f|| \leq ||f||$. Supongamos que $||\chi_f|| < ||f||$, entonces existe $||v|| = 1$ tal que $||f(v)|| > ||\chi_f||$, luego

$$||\chi_f|| \geq \left|\chi_f\left(\frac{e_{v,f(v)}}{||e_{v,f(v)}||}\right)\right| = \frac{|\langle f(v), f(v)\rangle|}{||f(v)||} = ||f(v)|| > ||\chi_f|| \quad !!$$

$\square$

Espacio dual

Sea X un espacio normado. El **espacio dual** se define como

$$X^\vee = \{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ está acotado}\}$$

Teorema ([1])

El espacio dual $X^\vee$ de un espacio normado X es un espacio de Banach.

Ejemplo

Consideremos

$$(\ell^1(\mathbb{N}))^\vee \xrightarrow{\cong} \ell^\infty(\mathbb{N}), \qquad f \longmapsto \{f(e_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Sea $x = \sum_{k\geq 1} x_k e_k \in \ell^1(\mathbb{N})$, entonces

- $|f(x)| \leq \sum_{k\geq 1} |x_k f(e_k)| \leq \sup_k |f(e_k)| \, ||x|| \quad \Longrightarrow \quad ||f|| \leq \sup_k |f(e_k)|$
- $|f(e_k)| \leq ||f|| \, ||e_k|| = ||f|| \; \forall k \quad \Longrightarrow \quad \sup_k |f(e_k)| \leq ||f||$
- *Si $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, sea $g \in (\ell^1(\mathbb{N}))^\vee$ dado por $g(x) = \sum_{k\geq 1} x_k y_k$*
  Notemos que $||g|| \leq ||\{y_k\}_k||_\infty$ y $g(e_n) = y_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición

La sucesión exacta de espacios de Banach

$$0 \longrightarrow ker(\rho) \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\rho} B^{tc}(H) \longrightarrow 0$$

determina una sucesión exacta de espacios duales

$$0 \longrightarrow B^{tc}(H)^{\vee} \xrightarrow{\rho^{\vee}} X^{\vee} \xrightarrow{\iota^{\vee}} ker(\rho)^{\vee} \longrightarrow 0$$

donde

$$\begin{array}{rccc} \rho^{\vee}: & B^{tc}(H)^{\vee} & \longrightarrow & X^{\vee} \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \rho \end{array}$$

Demostración.

- $\rho^{\vee}$ es inyectivo:

  $$0 = \rho^{\vee}(\varphi) = \varphi \circ \rho \Longrightarrow ker(\varphi) \supseteq Im(\rho) = B^{tc}(H) \Longrightarrow ker(\varphi) = B^{tc}(H)$$

  $$\therefore \varphi = 0$$

- $\iota^\vee$ es sobreyectivo:
  Sea $\varphi \in ker(\rho)^\vee$. Por el teorema de Hann-Banach, existe $\widetilde{\varphi} \in X^\vee$ tal que $\widetilde{\varphi}|_{ker(\rho)} = \varphi$ y $||\widetilde{\varphi}|| = ||\varphi||$. Así

$$\iota^\vee(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$$

- $Im(\rho^\vee) = ker(\iota^\vee)$:
  Como $\iota^\vee(\rho^\vee(\varphi)) = \varphi \circ (\rho \circ \iota) = 0$ para todo $\varphi \in B^{tc}(H)^\vee$, se sigue que $Im(\rho^\vee) \subseteq ker(\iota^\vee)$.
  Por otro lado, sea $\varphi \in ker(\iota^\vee) \subset X^\vee$. Definimos

$$\begin{array}{rcccccc} \psi: & B^{tc}(H) & \xrightarrow{\cong} & X/ker(\rho) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rho(x) & \longmapsto & x + ker(\rho) & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

$$y + ker(\rho) = x + ker(\rho) \Longrightarrow x - y \in ker(\rho) \Longrightarrow 0 = \varphi(x - y)$$

$$\therefore \varphi(x) = \varphi(y).$$

Además, dado $y \in ker(\rho)$

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x - y)| \leq ||\varphi|| \, ||x - y||,$$

luego

$$|\varphi(x)| \leq ||\varphi|| \, ||x + ker(\rho)||.$$

Por lo tanto $\psi \in B^{tc}(H)^{\vee}$ es tal que

$$\rho^{\vee}(\psi)(x) = \psi(\rho(x)) = \varphi(x) \qquad \forall x \in X$$

$\square$

Además, dado $y \in ker(\rho)$

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x-y)| \leq ||\varphi|| \, ||x-y||,$$

luego

$$|\varphi(x)| \leq ||\varphi|| \, ||x + ker(\rho)||.$$

Por lo tanto $\psi \in B^{tc}(H)^\vee$ es tal que

$$\rho^\vee(\psi)(x) = \psi(\rho(x)) = \varphi(x) \qquad \forall x \in X$$

$\square$

Proposición

La construcción $f \mapsto \chi_f$ se factoriza a través de $B^{tc}(H)^\vee$.

$$\begin{tikzcd} B(H) \arrow[r] \arrow[dr, hook, "\chi"'] & B^{tc}(H)^\vee \arrow[d, "\rho^\vee"] \\ & X^\vee \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Lema

Sea $f \in B(H)$. Entonces $\chi_f : X \to \mathbb{C}$ aniquila a $ker(\rho)$.

Demostración.

Sea $\sum \lambda_{v,w} e_{v,w} \in ker(\rho) \subset X$. Escribimos $\lambda_{v,w} = \mu_{v,w} |\lambda_{v,w}|$, donde $|\mu_{v,w}| = 1$. Entonces

$$\sum \lambda_{v,w} \langle f(v), w \rangle = \sum \mu_{v,w} \left\langle f\left(\left(\frac{|\lambda_{v,w}| \, ||w||}{||v||} \right)^{1/2} v \right), \left(\frac{|\lambda_{v,w}| \, ||v||}{||w||} \right)^{1/2} w \right\rangle$$

Como

$$\sum \left|\left| \left(\frac{|\lambda_{v,w}| \, ||w||}{||v||} \right)^{1/2} v \right|\right|^2 = \sum |\lambda_{v,w}| \, ||v|| \, ||w|| < \infty$$

$$\sum \left|\left| \left(\frac{|\lambda_{v,w}| \, ||v||}{||w||} \right)^{1/2} w \right|\right|^2 = \sum |\lambda_{v,w}| \, ||v|| \, ||w|| < \infty$$

Concluimos que $\sum \lambda_{v,w}\langle f(v), w\rangle$ es una función ultradébilmente continua de f.
Sea $f = \rho(e_{v',w'})$ para $v', w' \in H$

$$\begin{aligned}
\chi_f\left(\sum \lambda_{v,w} e_{v,w}\right) &= \sum \lambda_{v,w}\langle \rho(e_{v',w'})(v), w\rangle \\
&= \sum \lambda_{v,w}\langle \langle v, w'\rangle v', w\rangle \\
&= \sum \lambda_{v,w}\langle v', w\rangle \ \langle v, w'\rangle \\
&= \left\langle \sum \lambda_{v,w}\langle v', w\rangle v, w' \right\rangle \\
&= \left\langle \rho\left(\sum \lambda_{v,w} e_{v,w}\right)(v'), w' \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

Como $B(H) = \overline{B^{tc}(H)}$, obtenemos lo deseado.

$\square$

Demostración de la proposición.

Ya sabemos que $\chi_f(ker(\rho)) = \{0\}$ para todo $f \in B(H)$, luego $\chi_f \circ \iota = 0$ i.e. $\chi_f \in ker(\iota^\vee) = Im(\rho^\vee)$

$$\Longrightarrow \quad \exists!\ \varphi_f \in B^{tc}(H)^\vee \text{ tal que } \chi_f = \rho^\vee(\varphi_f) = \varphi_f \circ \rho$$

Definimos

$$B(H) \longrightarrow B^{tc}(H)^\vee, \qquad f \longmapsto \varphi_f$$

Ahora sean $f_1, f_2 \in B(H)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\rho^\vee(\varphi_{f_1+\lambda f_2}) = \chi_{f_1+\lambda f_2} = \chi_{f_1} + \lambda\chi_{f_2} = \rho^\vee(\varphi_{f_1}) + \lambda\rho^\vee(\varphi_{f_2}) = \rho^\vee(\varphi_{f_1} + \lambda\varphi_{f_2})$$

de donde $\varphi_{f_1+\lambda f_2} = \varphi_{f_1} + \lambda\varphi_{f_2}$. Notemos que

$$||f|| = ||\chi_f|| = ||\varphi_f \circ \rho|| \leq ||\varphi_f||\ ||\rho|| \leq ||\varphi_f||$$

Por otra parte, dado $y \in ker(\rho)$

$$|\varphi_f(\rho(x))| = |\varphi_f(\rho(x-y))| = |\chi_f(x-y)| \leq ||\chi_f||\ ||x-y||$$

por lo que $|\varphi_f(\rho(x))| \leq ||\chi_f||\ ||x + ker(\rho)|| = ||f||\ ||\rho(x)||_1$. $\square$

Proposición

La construcción $f \mapsto \chi_f$ induce un isomorfismo isométrico $B(H) \longrightarrow B^{tc}(H)^\vee$.

Demostración.

Sea $\mu \in X^\vee$ tal que $\mu(ker(\rho)) = \{0\}$ y $||\mu|| \leq 1$. Para $v \in H$ fijo tenemos

- $\rho(e_{v,w+w'} - e_{v,w} - e_{v,w'})(x) = \langle x, w + w' \rangle v - \langle x, w \rangle v - \langle x, w' \rangle v = 0$
- $\rho(e_{v,\lambda w} - \overline{\lambda} e_{v,w})(x) = \langle x, \lambda w \rangle v - \overline{\lambda} \langle x, w \rangle v = 0$

Así

$$V \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad w \in V \longmapsto \mu(e_{v,w})$$

es antilineal con norma $\leq ||v||$. Por lo tanto, existe $f(v) \in H$ tal que $\mu(e_{v,w}) = \langle f(v), w \rangle$ para toda $w \in H$ y $||f(v)|| \leq ||v||$. Como

- $\rho(e_{v+v',w} - e_{v,w} - e_{v',w})(x) = \langle x, w \rangle (v + v') - \langle x, w \rangle v - \langle x, w \rangle v' = 0$
- $\rho(e_{\lambda v,w} - \lambda e_{v,w})(x) = \lambda \langle x, w \rangle v - \lambda \langle x, w \rangle v = 0$

$$\Longrightarrow \quad \langle f(v + \lambda v'), w \rangle = \mu(e_{v+\lambda v',w}) = \mu(e_{v,w}) + \lambda \mu(e_{v',w})$$
$$= \langle f(v), w \rangle + \lambda \langle f(v'), w \rangle = \langle f(v) + \lambda f(v'), w \rangle$$

Por construccción

$$\mu(e_{v,w}) = \langle f(v), w \rangle = \chi_f(e_{v,w}) \quad \forall v, w \in H.$$

Por densidad, $\mu = \chi_f$.
Ahora sea $\varphi \in B^{tc}(H)^\vee$, entonces

$$\varphi \circ \rho \in X^\vee \text{ es tal que } \varphi \circ \rho(ker(\rho)) = \{0\}$$

de manera que $\exists\ f \in B(H)$ tal que

$$\rho^\vee(\varphi) = \varphi \circ \rho = \chi_f = \varphi_f \circ \rho = \rho^\vee(\varphi_f)$$

de donde $\varphi = \varphi_f$.
Así

$$\begin{tikzcd} B(H) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\chi"'] & B^{tc}(H)^\vee \arrow[d, "\rho^\vee"] \\ & X^\vee \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

$\square$

Notemos que

$$\begin{array}{ccc} B(H) & \xrightarrow{\cong} & B^{tc}(H)^{\vee} \\ I & \longmapsto & \varphi_I \end{array}$$

donde

$$\varphi_I\left(\rho\left(\sum_i e_{v_i,w_i}\right)\right) = \chi_I\left(\sum_i e_{v_i,w_i}\right) = \sum_i \langle v_i, w_i\rangle$$

Denotamos $tr = \varphi_I : B^{tc}(H) \longrightarrow \mathbb{C}$, conocido como **mapeo traza**.

Observación

Para $f \in B(H)$, vemos que

$$\begin{aligned} \varphi_f\left(\rho\left(\sum_i e_{v_i,w_i}\right)\right) &= \sum_i \langle f(v_i), w_i\rangle \\ &= tr\left(\rho\left(\sum_i e_{f(v_i),w_i}\right)\right) = tr\left(f \circ \rho\left(\sum_i e_{v_i,w_i}\right)\right) \end{aligned}$$

$\therefore \varphi_f(g) = tr(f \circ g)$ *para* $f \in B(H)$ *y* $g \in B^{tc}(H)$.

Por otro lado, para $f \in B(H)$ y $x \in H$

$$\begin{aligned}
\rho\left(\sum_i e_{v_i,w_i}\right) \circ f(x) &= \sum_i \langle f(x), w_i\rangle v_i \\
&= \sum_i \langle x, f^*(w_i)\rangle v_i \\
&= \rho\left(\sum_i e_{v_i,f^*(w_i)}\right)(x)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
tr\left(\rho\left(\sum_i e_{v_i,w_i}\right) \circ f\right) &= tr\left(\rho\left(\sum_i e_{v_i,f^*(w_i)}\right)\right) \\
&= \sum_i \langle v_i, f^*(w_i)\rangle \\
&= \sum_i \langle f(v_i), w_i\rangle
\end{aligned}$$

$\therefore\ tr(g \circ f) = tr(f \circ g)$ para $f \in B(H)$ y $g \in B^{tc}(H)$.

Bibliografía

- E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications. New York, 1978.
- Young N, An introduction to Hilbert space. Cambridge university press, (1988).