Lectura 7

Sea V espacio de Hilbert

Definición 3 Sean $A \subseteq B(V)$, $A' \subseteq B(V')$ álgebras de Von Neumann. Un morfismo de álgebras de Von Neumann de A a A' es un $*$-álgebra homomorfismo que es continuo entre las las topologías ultra-débiles.

Recordatorio. La topología ultra débil tiene una sub-base dada por los conjuntos:

$$\{x \in B(V) : |\Sigma \langle x(v_i) - x_0(v_i), w_i \rangle| < \varepsilon\},$$

donde $\Sigma \|v_i\|^2, \Sigma \|w_i\|^2 < \infty$.

Definición Una representación de una álgebra de Von Neumann $A \subseteq B(V)$, es un V.N homomorfismo

$$\rho : A \to B(W),$$

para algún espacio de Hilbert W.

ρ resulta ser una acción de A sobre W que satisface:

- $\forall v, w \in W$, $\langle a \cdot v, w \rangle_W = \langle v, a^* \cdot w \rangle_W$;
- $a \mapsto \Sigma \langle a \cdot v_i, w_i \rangle$ es continuo en la topología ultra-débil de A, para cualesquiera $(v_i), (w_i) \in W^{\mathbb{N}}$, $\Sigma \|v_i\|, \Sigma \|w_i\| < \infty$.

  continuidad ultra-débil

Definición. Sea A una C^*-álgebra. Una representación de A es un homomorfismo de C^*-álgebras $\rho : A \to B(W)$ para algún espacio de Hilbert W.

Objetivo:

Teorema 4. Sea $A \subseteq B(V)$ álgebra V.N. Suponga que está dada

$$\rho : A \to B(W),$$

una representación de C^*-álgebras. Entonces

$\rho : A \to B(W)$ es una representación de V.N. $\iff$ $W \cong V \oplus V \oplus \dots$ finita o infinita.

Definición. Sea M espacio de Banach. La topología débil-* es la topología débil sobre $M^\vee$ inducida por la familia de funciones

$$\{\hat{f} : f \in M,\ \hat{f} : M^\vee \to \mathbb{C},\ \hat{f}(\varphi) := \varphi(f)\}.$$

Conjuntos de la sub-base son:

$$\{\varphi \in M^\vee : |\varphi(f) - \varphi_0(f)| < \varepsilon\}.$$

Proposición 2 Sea M un espacio de Banach, y sea $A \subseteq M^\vee$ un subespacio cerrado en la topología débil-*. Entonces $A \simeq W^\vee$ para algún espacio de Banach W.

Demostración. Dada una sucesión exacta de espacios de Banach

$$0 \to K \xrightarrow{\theta} M \xrightarrow{\psi} W \to 0,$$

obtenemos una sucesión exacta de los espacios duales

$$0 \to W^\vee \xrightarrow{\hat{\psi}} M^\vee \xrightarrow{\hat{\theta}} K^\vee \to 0.$$

lo anterior se sigue de considerar los mapeos

$$\begin{aligned} \hat{\psi} : W^\vee &\to M^\vee \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \psi \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \hat{\theta} : M^\vee &\to K^\vee \\ \mu &\mapsto \mu \circ \theta \end{aligned} .$$

$K = \{$está dado por los $\ker \varphi$ para todo $\varphi \in A\} = \bigcap_{\varphi \in A} \ker \varphi \subseteq M$

Definimos $W = M/K$. Probaremos que

$$A = \ker \hat{\theta} = \operatorname{Im} \hat{\psi} \simeq W^\vee .$$

Notemos que $\mu \in \ker \hat{\theta} \iff \mu \circ \theta = 0 \in K^\vee \iff \mu(k) = 0 \ \forall k \in K$.

Sea $\mu \in \ker \hat{\theta}$ $(\mu|_K = 0)$.

Sean $x_1, \dots, x_n \in M$. Considere el mapeo

$$\begin{aligned} T : M^\vee &\to \mathbb{R}^n \\ \sigma &\mapsto (\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n)) \end{aligned}$$

T es lineal y continuo

$$T(\sigma+\tau) = ((\sigma+\tau)(x_1), \dots, (\sigma+\tau)(x_n)) = T(\sigma) + T(\tau).$$

$$\|T(\sigma)\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |\sigma(x_j)| \leq \max_{j=1,\dots,n} \|x_j\| \, \|\sigma\|.$$

Suponer $T(\mu) \notin T(A)$. Entonces

existe $v \in (T(A))^\perp$, $v \neq 0$ tal que

$$\langle T(\sigma), v \rangle_{\mathbb{R}^4} = 0 \qquad \forall \sigma \in A$$

$$\langle T(\mu), v \rangle_{\mathbb{R}^4} \neq 0.$$

Notemos que para $\tau \in M^\vee$

$$\langle T(\tau), v \rangle = \langle (\tau(x_1), \dots, \tau(x_n))^T, (v_1, \dots, v_n)^T \rangle$$

$$= v_1 \tau(x_1) + \dots + v_n \tau(x_n)$$

$$= \tau(v_1 x_1 + \dots + v_n x_n).$$

El vector $x = \Sigma v_j x_j \in K$ pues para todo $\sigma \in A$ $\left(K = \bigcap_{\varphi \in A} \ker \varphi\right)$.

$$\sigma(x) = \langle T(\sigma), v \rangle = 0.$$

Esto implicaría que $\mu(x) = 0$ ¡! . Así $T(\mu) \in T(A)$.

Por tanto existe $\mu' \in A$ tal que $\mu'(x_j) = \mu(x_j)$ $\forall j = 1, \dots, n$.

Esto implica que $\mu \in \mathrm{clos}_{w\text{-}*}(A)$. ∎

Recordemos que si $W = B^{tr}(V)$, entonces $W^\vee \simeq B(V)$, un isomorfismo isométrico de C^*-álgebras.

Con esta observación podemos "dotar" a $B(V)$ con la topología débil-$*$ de $W^\vee$.

Lema Para $B(V)$, la topología débil-$*$ coincide con la topología ultradébil.

Corolario 1. Sea $A \subseteq \mathcal{B}(V)$ una álgebra V.N. Entonces existe una isometría $A \simeq W^\vee$, para algún espacio de Banach W.

Idea principal de demostración

- A álgebra V.N. $\Rightarrow$ $A = \operatorname{clos}_{UW} A = \operatorname{clos}_{W\text{-}*} A \overset{\text{Prop. 2 } \exists W}{\Longrightarrow} A \simeq W^\vee$.

Definición 5 Sea A C^*-álgebra. Una representación V de A se dice que es cíclica si existe $v \in V$ tal que Av es denso en V.

Proposición 6 Sea A C^*-álgebra. Entonces toda representación V de A puede obtenerse como suma ortogonal directa de representaciones cíclicas

$$V = \bigoplus V_{v_j} \qquad V_{v_j} \perp V_{v_k}.$$

Demostración. $\mathcal{S} := \{ E : E \leq V \text{ subespacio } A\text{-invariante y cíclico} \}$.

$$T := \{ \mathcal{S}_0 : \mathcal{S}_0 = \{V_\alpha\} \subseteq \mathcal{S}, \quad V_\alpha \perp V_\beta \text{ si } \alpha \neq \beta \}.$$

$(T, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Por el lema de Zorn existe $S_M \in T$ elemento maximal.

Sea $W = \bigoplus_{V_\alpha \in S_M} V_\alpha$ suma ortogonal. Si $V = W$ acabamos.

Si $W \neq V$, existe $v \in W^\perp$, $v \neq 0$. Como V es una $*$-representación de A, $Av \perp W$, en efecto, dado $f \in A$, $w \in W$, $f^* w \in W$

$$\langle f \cdot v, w \rangle = \langle v, f^* \cdot w \rangle = 0.$$

Entonces $S_M \cup \{\overline{Av}\} \in T$! pues S_M es maximal, i.e., $W = V$. ■

Teorema 4. Sea $A \subseteq B(V)$ álgebra V.N. Suponga que está dado

$$\rho : A \to B(W),$$

una representación de C^*-álgebras. Entonces

Prop. 6

$\rho : A \to B(W)$ es una representación de V.N. $\iff$ $W \cong V \oplus V \oplus \cdots$ finita o infinita.

Proposición 7. Sea $A \subseteq B(V)$ álgebra V.N., y sea W una representación cíclica V.N. de A. Entonces W es isomorfo a un sumando directo de la suma directa ortogonal $V^{\oplus \infty} = V \oplus V \oplus \cdots$.

Sea $A \subseteq \mathcal{B}(V)$ álgebra de V. N. Supongamos W una representación cíclica de V. N. de A.

Fijemos $w \in W$, tal que Aw sea denso en W.

Tomemos el funcional

$$\mu : A \to \mathbb{C}$$
$$a \mapsto \langle a.w, w \rangle_W = \sum \langle a \cdot v_i, v_i \rangle_V$$

Por lo que W es una representación de V. N. entonces μ es continuo en la topología ultra-débil.

** Vimos que $\mathcal{B}(V) \simeq \mathcal{B}^{tc}(V)^{\vee}$. $A_* = \iota(A) \subseteq \mathcal{B}^{tc}(V)^{\vee}$

Así $\mu : A \to \mathbb{C}$, $\mu : A_* \to \mathbb{C}$. lo extendemos por H. B. a $\mathcal{B}^{tc}(V)^{\vee}$.

4.2.10

Teorema (A.2 Theorem, Murphy, pp 268). Sea X espacio vectorial normado. Entonces un funcional lineal $\mu : X^{\vee} \to \mathbb{C}$ es débil-* continuo sí y sólo si $\mu = \hat{g}$ para algún $g \in X$, donde $\hat{g}(\varphi) = \varphi(g)$ para todo $\varphi \in X^*$.

Por el teorema anterior existe $g \in \mathcal{B}^{tc}(V)$ tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{B}^{tc}(V)^{\vee}$

$$\mu(\varphi) = \hat{g}(\varphi) = \varphi(g) = \chi_f(g) = tr(fg) = \sum \lambda_{v,w} \langle f(v), w \rangle_V = \sum \langle f v_i, w_i \rangle_V$$

**

Proposición 7. Sea $A \subseteq \mathcal{B}(V)$ álgebra V.N., y sea W una representación cíclica V. N. de A. Entonces W es isomorfo a un sumando directo de la suma directa ortogonal $V^{\oplus \infty} = V \oplus V \oplus \cdots$.

Proposición 8. Sea $A \subseteq \mathcal{B}(V)$ álgebra de V. N. Sea W una representación cíclica de V. N. de A, con vector cíclico w. Sea $\mu : A \to \mathbb{C}$, dada por $\mu(a) = \langle a \cdot w, w \rangle_W$, y suponga que existen $v, v' \in V$ con $\mu(a) = \langle av, v' \rangle_V$. Entonces W es isomorfo (como representación de A) a una suma directa del espacio de Hilbert V.

Recordatorio: Sea A C^*-álgebra. Consideremos que A actúa sobre W, y sea $w \in W$ un vector unitario.

El mapeo $\mu : A \to \mathbb{C}$ dado por

$$\mu(a) = \langle a \cdot w, w \rangle$$

es un estado.

Podemos completar A con respecto al producto interno $\langle a, b \rangle_A := \mu(b^* a)$.

Después construimos una representación $V_\mu = \widehat{A / \ker \mu}$.

El mapeo

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow W \\ a &\longmapsto aw \end{aligned}$$

se extiende a un encaje isométrico $V_\mu \to W$, y por lo tanto se llega a una descomposición en suma directa

$$W \simeq V_\mu \oplus V_\mu^\perp .$$

Si w es un vector cíclico, entonces $W \simeq V_\mu$.

Proposición 8. Sea $A \subseteq \mathcal{B}(V)$ álgebra de V. N. Sea W una representación cíclica de V. N. de A, con vector cíclico w. Sea $\mu : A \to \mathbb{C}$, dada por $\mu(a) = \langle a \cdot w, w \rangle_W$, y suponga que existen $v, v' \in V$ con $\mu(a) = \langle a v, v' \rangle_V$. Entonces W es isomorfo (como representación de A) a una suma directa del espacio de Hilbert V.

Demostración. Suponer $\|w\| = 1$. Entonces $W \simeq V_\mu$.

- $\mu \geq 0$. Dado a positivo, existe $b \in A$ tal que $a = b^* b$,

$$\mu(a) = \langle b^* b \cdot w, w \rangle_W = \langle b \cdot w, b \cdot w \rangle_W \geq 0.$$

- Dado a positivo. Entonces

$$\mu(a) \leq \mu(a) + \frac{1}{4} \langle a \cdot (v - v'), v - v' \rangle_V$$

$$= \mu(a) + \frac{1}{4} \langle a v, v \rangle + \frac{1}{4} \langle a v', v' \rangle - \frac{1}{4} \cancel{\langle a v, v' \rangle}^{\mu(a)} - \frac{1}{4} \cancel{\langle a v', v \rangle}^{\overline{\mu(a)} = \mu(a)}$$

$$= \frac{1}{4} \langle a v, v \rangle + \frac{1}{4} \langle a v', v' \rangle + \frac{1}{2} \mu(a)$$

$$= \frac{1}{4} \langle a v, v \rangle + \frac{1}{4} \langle a v', v' \rangle + \frac{1}{4} \langle a v, v' \rangle + \frac{1}{4} \langle a v', v \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \langle a \cdot (v + v'), v + v' \rangle_V$$

- $\mu \geq 0. \Rightarrow \quad \langle a, b \rangle_A := \mu(b^* a)$ (pre-) producto interno en A.

- Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\mu(b^* a)^2 \leq \mu(b^* b) \mu(a^* a)$$

$$\leq \frac{1}{16} \langle b^* b (v + v'), v + v' \rangle \langle a^* a (v + v'), v + v' \rangle$$

$$= \frac{1}{16} \| b(v + v') \|^2 \| a(v + v') \|^2$$

i.e., $$\mu(b^* a) \leq \frac{1}{4} \| b(v + v') \| \, \| a(v + v') \|.$$

- $V_0 := \operatorname{clos}(A(v + v')) \subseteq V$. Por lo anterior

$$\langle a(v + v'), b(v + v') \rangle = \mu(b^* a)$$

se extiende a un producto interno $\langle , \rangle : V_0 \times V_0 \to \mathbb{C}$ que satisface

$$\langle x, y\rangle \leq \frac{1}{4} \|x\| \, \|y\|.$$

- Para x fijo, el mapeo $y \longmapsto \langle x, y\rangle$ es un funcional antilineal continuo de norma $\leq \frac{1}{4}\|x\|$, por lo tanto existe $f(x) \in V_0$ tal que

$$\langle x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle \qquad (\forall y),$$

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{4}\|x\| .$$

- Este mapeo $x \longmapsto f(x)$ resulta ser lineal y de norma $\leq \frac{1}{4}$.

$$\langle f(x+\lambda x'), y\rangle = \langle x + \lambda x', y\rangle = \langle f(x), y\rangle + \langle \lambda f(x'), y\rangle = \langle f(x) + \lambda f(x'), y\rangle .$$

Por lo tanto

$$\mu(b^* a) = \langle a(v+v'), b(v+v')\rangle = \langle fa(v+v'), b(v+v')\rangle .$$

En particular para $a, b, c \in A \subseteq \mathcal{B}(V)$

$$\begin{aligned} \langle b^* fa(v+v'), c(v+v')\rangle &= \langle fa(v+v'), bc(v+v')\rangle \\ &= \mu((c^* b^*)a) = \mu(c^*(b^* a)) \\ &= \langle f b^* a(v+v'), c(v+v')\rangle \end{aligned}$$

Entonces $fb^* = b^* f$ para todo $a(v+v') \in A(v+v')$, y por lo tanto sobre todo V_0.

- f es un operador positivo, pues

$$\langle f a(v+v'), a(v+v')\rangle = \langle a(v+v'), a(v+v')\rangle \geq 0 .$$

Por lo tanto admite una raíz cuadrada positiva $f^{1/2}$ que también conmuta con la acción de A,

$$\begin{aligned} \mu(b^* a) &= \langle f a(v+v'), b(v+v')\rangle \\ &= \langle f^{1/2} \cdot f^{1/2} a(v+v'), b(v+v')\rangle \\ &= \langle f^{1/2} a(v+v'), f^{1/2} b(v+v')\rangle \\ &= \langle a f^{1/2}(v+v'), b f^{1/2}(v+v')\rangle . \end{aligned}$$

Así W es isomorfo a la representación cíclica de V generada por el vector $u := f^{1/2}(v+v')$.

$\blacksquare$