§ Lectura 8. Propiedades Universales

Consideremos $\mathcal{C}$ la categoría de álgebras C^*, donde

$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$: álgebras C^*

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$: homomorfismos de $*$-álgebras.

y sea $\mathcal{D}$ la categoría de álgebras de von Neumann, donde

$\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$: álgebras de von Neumann (hasta ahora todas son subalgebras de operadores con características adicionales: $A = A''$ y cerrada en las topologías fuerte (ultra fuerte) y débil (ultradébil).

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}$: homomorfismos de $*$-álgebras continuos con la topología ultradébil $\mathcal{T}_W^U$

(La topología ultradébil está definida por las seminormas $p(T) = \sum_{j=0}^{\infty} |\langle Tv_j, w_j\rangle|$ donde $\sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 < \infty$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \|w_j\|^2 < \infty$)

Aquí podemos considerar el funtor "olvidar la estructura de von Neumann"

$\mathrm{Forg}_{vN} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ $\qquad$ $\mathrm{Forg}_{vN}\,\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para toda $\mathcal{A}$ álgebra de von Neumann.

$\mathrm{Forg}_{vN}(f) = f$ para todo homomorfismo de $*$-álgebras $\mathcal{T}_W^U$-continuas.

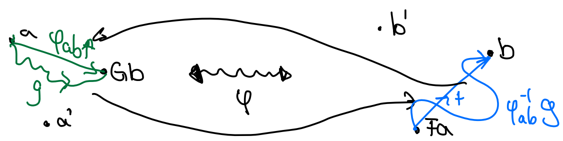
Objetivo Construir un funtor adjunto izquierdo de $\mathrm{Forg}_{vN} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

Recordatorio (Mac Lane pg. 80) Dadas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Una adjunción de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es:

i) Un par de funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

ii) Una asignación que para cada a en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ y b en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ y una flecha $Fa \xrightarrow{f} b$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}$ asocia una flecha $a \xrightarrow{\varphi_{ab} f} Gb$ y viceversa.



$(*)$ ... $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fa, b) \underset{\cong}{\xrightarrow{\varphi_{ab}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Gb)$ (biyección)

Esta asociación es natural en a y en b (Visto como funtores

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{B} \arrow[dr, "\mathrm{Hom}"] & \\ \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \arrow[ur, "F^{op} \times id_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "id_{\mathcal{A}} \times G"'] & & \mathrm{Sets} \\ & \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \arrow[ur, "\mathrm{Hom}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego para ver la naturalidad hay que tomar a, a en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^{op}$ y b, b' en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ junto con flechas h en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(a, a')$, k en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b, b')$ es decir $a' \xrightarrow{h} a$ y $b \xrightarrow{k} b'$ entonces

Los siguientes diagramas deben ser conmutativos.

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{B}}(Fa,b) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{B}}(Fa,k)"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a,Gb) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(a,G(k))"] \\ Hom_{\mathcal{B}}(Fa,b') \arrow[r, "\varphi"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a,Gb') \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} \langle a,b\rangle \\ \downarrow id_{\mathcal{A}}\times k \\ \langle a,b'\rangle \end{matrix}$$

y

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{B}}(Fa,b) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{B}}(F(h),b)"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a,Gb) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(h,b)"] \\ Hom_{\mathcal{B}}(Fa',b) \arrow[r, "\varphi"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a',Gb) \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} \langle a,b\rangle \\ \downarrow h\times id_{\mathcal{B}} \\ \langle a',b\rangle \end{matrix}$$

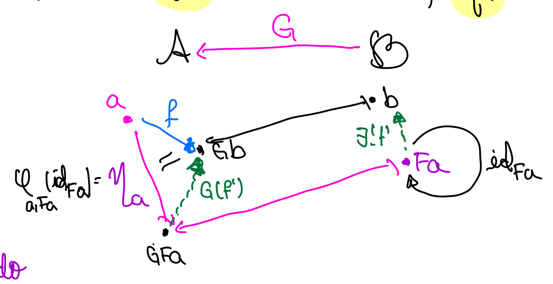
$$Hom_{\mathcal{B}}(Fa,b) \xrightarrow[\cong]{\varphi_{ab}} Hom_{\mathcal{A}}(a,Gb) \quad \ldots \; *)$$

$a = Gb$

F es llamado funtor adjunto izquierdo de G y G es llamado funtor adjunto derecho de F y se llega a denotar como $F \dashv G$.

Toda adjunción determina una flecha universal, a saber, tomando $b = Fa$ en $*)$ entonces $Hom_{\mathcal{B}}(Fa,Fa)$ tiene la flecha identidad id_{Fa} y sea $\eta_a := \varphi_{a,Fa}(id_{Fa}) \in Hom_{\mathcal{A}}(a, GFa)$ es universal en el siguiente sentido:

Una flecha universal de a en $Ob\,\mathcal{A}$ a $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es un par $\langle Fa, \eta_a\rangle$, Fa en $Ob\,\mathcal{B}$ y $\eta_a : a \to GFa$ tal que para todo par $\langle b, f\rangle$ con b en $Ob\,\mathcal{B}$ y $a \xrightarrow{f} Gb$ existe una única flecha $Fa \xrightarrow{f'} b$ en $Hom_{\mathcal{B}}$ t.q. $G(f') \circ \eta_a = f$.



La adjunción, para cada a en $Ob\,\mathcal{A}$, está generando las flechas universales $\langle Fa, \eta_a\rangle$. Más aún $\boxed{\eta : Id_{\mathcal{A}} \longrightarrow GF}$ es una transformación natural, pues $GF(h) \circ \eta_{a'} = GF(h) \circ \varphi(id_{Fa'}) = \varphi(F(h) \circ id_{Fa'})$
$= \varphi(id_{Fa} \circ F(h)) = \eta_a \circ h$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\eta_a"] & GFa \\ a' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\eta_{a'}"'] & GFa' \arrow[u, "GF(h)"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{matrix} Fa' \\ F(h) \downarrow \\ Fa \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a' \\ h \downarrow \\ a \end{matrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{B}}(Fa',Fa') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{B}}(Fa',F(h))"'] & Hom_{\mathcal{A}}(a',GFa') \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(a',GF(h))"] \\ Hom_{\mathcal{B}}(Fa',Fa) \arrow[r, "\varphi"] & Hom_{\mathcal{A}}(a',GFa) \\ Hom_{\mathcal{B}}(Fa,Fa) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, "Hom_{\mathcal{B}}(F(h),Fa)"] & Hom_{\mathcal{A}}(a,GFa) \arrow[u, "Hom_{\mathcal{A}}(h,GFa)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} \langle a',Fa'\rangle \\ \downarrow id_{\mathcal{A}} \times F(h) \\ \langle a',Fa\rangle \\ \uparrow h \times id_{Fa} \\ \langle a,Fa\rangle \end{matrix}$$

$id_{Fa'} \mapsto \eta_{a'}$

$F(h) \circ id_{Fa'}$; $GF(h) \circ \eta_{a'} = \varphi(F(h) \circ id_{Fa'})$

$id_{Fa} \circ F(h)$; $\eta_a \circ h$; $\varphi(id_{Fa} \circ F(h)) = \eta_a \circ h$

$id_{Fa} \mapsto \eta_a$

También la biyectividad de φ puede expresarse en términos de η_a como: $\varphi(f) = G(f)\circ\eta_a$ para $Fa \xrightarrow{f} b$

pues por la naturalidad de φ se tiene que

$\varphi(f) = \varphi(f\circ id_{Fa}) = Gf\circ\varphi(id_{Fa}) = Gf\circ\eta_a.$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fa, Fa) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, GFa) \arrow[d, "G(f)_*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fa, b) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Gb) \end{tikzcd}$$

$id_{Fa} \mapsto \eta_a$, $\quad f\circ id_{Fa} \mapsto \varphi(f) = G(f)\circ\eta_a$

$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$

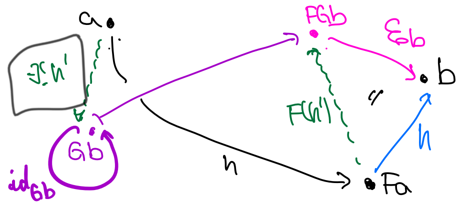
De forma dual, la adjunción da una flecha universal

de $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ en b (para todo b en $Ob\,\mathcal{B}$). — cambió el orden

es el par $\langle Gb, \varepsilon_b\rangle$ con Gb en $Ob\,\mathcal{A}$ y $\varepsilon_b : FGb \to b$

t.q. para todo $\langle a, h\rangle$ con a en $Ob\,\mathcal{A}$ y $Fa \xrightarrow{h} b$

existe una única flecha $a \xrightarrow{h'} Gb$ t.q. $h = \varepsilon_b\circ F(h')$.



En particular tenemos que para $x \xrightarrow{g} Gb$ se cumple que

$\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_b\circ Fg$.

$$\boxed{\varepsilon : FG \to id_{\mathcal{B}}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FGb, b) \arrow[d, "(Fg)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Gb, Gb) \arrow[l, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, "g^*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fx, b) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, Gb) \arrow[l, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\varepsilon_b \mapsfrom id_{Gb}$, $\quad \varepsilon_b\circ Fg \mapsfrom id_{Gb}\circ g$

Finalmente se tiene que $id_{Gb} = \varphi(\varepsilon_b) = G(\varepsilon_b)\circ\eta_{Gb}$.

Por lo cual la composición de transformaciones naturales $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$ es la transformación identidad. En resumen

Thm Una adjunción de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ determina

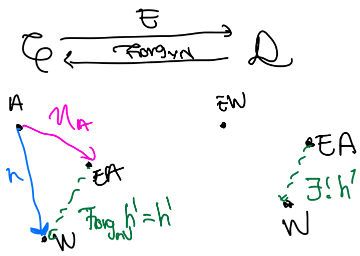
i) Una transformación natural $\eta : id_{\mathcal{A}} \to GF$ tal que para cada a en $Ob\,\mathcal{A}$ la flecha η_a es universal de a en G, mientras que el adjunto derecho de cada $Fa \xrightarrow{f} b$ es $\varphi(f) = G(f)\circ\eta_a : a \to Gb$

ii) Una transformación natural $\varepsilon : FG \to id_{\mathcal{A}}$ tal que cada flecha ε_b es universal de F en b, mientras que cada $a \xrightarrow{g} Gb$ tiene como adjunto izq a $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_b\circ F(g) : Fa \to b$.

Más aún, ambas composiciones $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$ y $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$ son transformaciones identidad. η es llamado la unidad y ε la counidad de la adjunción.

Retomando, un adjunto izquierdo del funtor $\mathrm{Forg}_{nV}: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un funtor $E: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que para todo A en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (álgebra C^*) y toda V en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ (álgebra de von Neumann) hay una biyección

$$\varphi_{AV}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(EA, V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathrm{Forg}_{nV} V)$$



con lo cual, para cada álgebra C^* A generar una flecha universal de A en Forg_{nV}, $\langle EA, \eta_A \rangle$ $\eta_A: A \to \mathrm{Forg}_{nV} EA = EA$ (morfismo de $*$-álgebras) con la propiedad: para todo W álgebra de von Neumann y $A \xrightarrow{h} W$ un $*$-álgebra homorfismo existe $EA \xrightarrow{\exists! h'} W$ t.q. $h = h' \circ \eta_A$ donde h' es un homomorfismo de $*$-álgebras continuo con las topologías ultradébiles. El álgebra de von Neumann EA es única salvo equivalencia y es llamada **el álgebra de von Neumann (universal) envolvente de A.**

Para llamar a EA un álgebra de von Neumann envolvente de A es suficiente con verificar las siguientes propiedades (Definición de EA y $E(A \to A')$) (Recordar A álgebra de von Neumann $\Rightarrow$ $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ $*$-álgebra cerrada en $\mathcal{C}_W^{u}$ de $\mathcal{B}(V)$)

a) $\mathrm{Im}(\eta_A) = \eta_A[A]$ es denso con la topología ultradébil en EA. (Esto da estructura de álgebra de von Neumann a EA?)

b) Cada $*$-álgebra homomorfismo $A \to \mathcal{B}(H)$ se extiende a un homomorfismo de $*$-álgebras continuo en la topología ultradébil $EA \to \mathcal{B}(H)$ (topología generada por las seminormas $p_{(v_i),(w_i)}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle T v_i, w_i \rangle|$) $\sum \|v_i\|^2 < \infty$, $\sum \|w_i\|^2 < \infty$

Si ya tenemos que se cumplen a) y b) y si tenemos un homomorfismo $A \xrightarrow{h} W$ de $*$-álgebras con $W \subseteq \mathcal{B}(H)$ álgebra de von Neumann entonces por b) se extiende a un homomorfismo ultradébil continuo de $*$-algebras $EA \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{B}(H)$. Como $W \subseteq \mathcal{B}(H)$ es cerrado en la topología ultradébil entonces $\tilde{h}^{-1}[W] \subseteq EA$ es un cerrado en la topología ultradébil de EA y $\eta_A[A] \subseteq \tilde{h}^{-1}[W]$ (por ser extensión de h).

Luego por a) tenemos que $\overline{\eta_A[A]} = EA \subseteq \overline{\tilde{h}^{-1}[W]} = \tilde{h}^{-1}[W] \subseteq EA \Rightarrow \tilde{h}^{-1}[W] = EA$.

Si suponemos que hay otra extensión $\bar{h}: EA \to \mathcal{B}(H)$ de h, i.e. $\eta_A[A] \subseteq \bar{h}^{-1}[W]$ y si $x_0 \in EA$ entonces para todo abierto $x_0 \in U \subseteq EA$, $U \cap \eta_A[A] \neq \emptyset$ donde $U = \bigcup \bigcap \{x \mid p_{(a_i),(w_i)}(x - x_0) < \varepsilon\}$ entonces $\forall \varepsilon > 0$

$$q_{(T_i),(S_i)}\left(\tilde{h}(x_0) - \bar{h}(x_0)\right) = q\left(\tilde{h}(x_0) - \tilde{h}(x) + \bar{h}(x) - \bar{h}(x_0)\right) \leq q\left(\tilde{h}(x_0) - \tilde{h}(x)\right) + q\left(\bar{h}(x_0) - \bar{h}(x)\right) < \varepsilon.$$

I) Construyamos primero la asignación EA.

Sea $S(A) = \{ \nu : A \to \mathbb{C} \mid \nu \text{ es estado} \}$ (ν estado $\Leftrightarrow$ $\|\nu\| \leq 1$ $\Leftrightarrow$ $x \in A$, x no negativo $\Rightarrow \nu(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ existe H espacio de Hilbert, una rep $A \to B(H)$ y un vector unitario $\omega \in H$ t.q. $\nu(x) = \langle x\omega, \omega \rangle_H$).

Para cada $\nu \in S(A)$ sea K_ν su respectiva representación de A asociada, i.e. $K_\nu = \overline{(A, \langle a|b \rangle_\nu := \nu(b^*a))}$

Sea ahora $K := \bigoplus_{\nu \in S(A)} K_\nu$ con lo que se puede tomar $A \xrightarrow{r} B(K := \bigoplus_{\nu \in S(A)} K_\nu)$ (actuando entrada por entrada)

y sea $EA = \overline{r[A]} \subseteq B(K)$ con respecto a la topología ultradébil en $B(K)$, i.e. EA σ_ω^ν-cerrado en $B(H)$.

entonces EA es un álgebra de von Neumann y esta el mapa

$$A \xrightarrow{r} r[A] \xhookrightarrow{i} EA \subseteq B(K)$$

donde $i \circ r[A]$ es σ_ω^ν-denso en EA, por lo cual esta construcción cumple a).

Para verificar b) Sea $A \to W \subseteq B(H)$ una representación de A (como $*$-álgebra) en un álgebra de von Neumann. En la nota anterior vimos que toda representación de A se puede obtener como una suma directa de representaciones cíclicas (prop. 6) por lo que si tomamos a $A \to W \subseteq B(H)$ como una representación cíclica ($\exists v \in H$ t.q. $\overline{Av} = H$) entonces para el funcional $\mu : A \to \mathbb{C}$, $\mu(x) = \langle xv, v \rangle_H$ tendremos que $H \cong K_\mu$

[Si $u \in H$ entonces $\exists (x_i v)_{i=1}^\infty$ de Cauchy en Av t.q. $\lim_{n\to\infty} \|u - x_i v\|_H = 0$ entonces $u \longmapsto \lim_{n\to\infty} x_i$

donde $\|x_i - x_j\|_{K_\mu}^2 = \langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle_{K_\mu} = \langle (x_i - x_j)^*(x_i - x_j)v, v \rangle_H = \langle (x_i - x_j)v, (x_i - x_j)v \rangle_H = \|(x_i - x_j)v\|_H^2$

$= \|x_i v - x_j v\|^2 < \varepsilon$. para $i, j \geq N$ por ser de Cauchy, ent. $(x_i)_{i=1}^\infty$ es de cauchy en A y por lo tanto converge en $\overline{A} = K_\mu$.]

Si tomamos entonces $A \xrightarrow{h} W \subseteq B(K_\mu)$ podemos extender a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "r"] \arrow[ddr, "h"] & \\ r[A] \arrow[d, hook] & \\ EA \arrow[r, dashed, "h'"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & W \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ B(K) & B(K_\mu) \end{tikzcd}$$

dada por: $\forall z \in EA = \overline{r[A]}$

$h'(z) = h'(\lim_{n\to\infty} r(x_i)) := \lim_{n\to\infty} h(x_i)$ con $h(x_i) \in W$ álgebra de von Neumann, i.e. σ_ω^ν-cerrado en $B(H)$.

la cual extiende a h y es continua con las topologías ultradébiles.

Hasta ahora tenemos $EA = \overline{r[A]} \subseteq B(\bigoplus_{\nu \in S(A)} K_\nu)$ pero veamos como describirlo más explícitamente.

Recordemos que toda álgebra C^* A admite una representación fiel en un espacio de Hilbert, el generado por los estados

mapeo $A \xrightarrow{r} EA$ es una inyección y $\|r(x) - r(y)\|_{B(K)} = \|r(x-y)\|_{B(K)} \overset{?}{=}$

Ahora como EA es un álgebra de von Neumann, tenemos que hay un espacio de Banach $\mathcal{B}$ y una isometría $EA \cong \mathcal{B}^\vee$, el cual manda la topología ultradébil de EA en la topología débil-* en $\mathcal{B}^\vee$

El mapa $r: A \to EA \cong \mathcal{B}^\vee$ es adjunto a un operador acotado $\rho': \mathcal{B} \to A^\vee$.

__Lemma__ $\rho': \mathcal{B} \to A^\vee$ es un isomorfismo de espacios de Banach, es decir admite una inversa continua.

Sea $\mathcal{B} := \{\varphi: EA \to \mathbb{C} \mid \varphi$ es continua con la topología ultradébil de $EA\}$, ent $\rho': \mathcal{B} \to A^\vee$ es restricción a A. Como A es denso en EA entonces φ está determinado por sus valores en A lo cual da la inyectividad de ρ'.

Para probar suprayectividad (extensión de $A \to \mathbb{C}$ a $EA \to \mathbb{C}$ ultradébilmente continua) basta verificar en el caso de μ Hermitiana, i.e. $\mu(a^*) = \overline{\mu(a)}$ $\forall a \in A$ (pues $\mu = \frac{\mu + \mu^*}{2} + i\frac{\mu - \mu^*}{2i}$ con $\mu^*(a) = \overline{\mu(a^*)}$)

Supongamos que μ es positivo, i.e. $\mu(a) \geq 0$ $\forall a \in A$ entonces $\frac{\mu}{\|\mu\|}$ es un estado en A (si $\mu \neq 0$).

(¿ $\frac{\mu}{\|\mu\|}(1) = 1$? No es necesario) entonces existe $v \in H$ con $\|v\| = 1$ t.q. $\frac{\mu}{\|\mu\|}(a) = \langle av, v\rangle_H$ la cual extiende por $\frac{\mu}{\|\mu\|}(z) = \frac{\mu}{\|\mu\|}\left(\lim_{n\to\infty} r(a_n)\right) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(a_n)}{\|\mu\|} = \lim_{n\to\infty} \langle a_n v, v\rangle_H$ la cual converge pues

$|\langle a_n v, v\rangle_H - \langle a_m v, v\rangle_H| = |\langle (a_n - a_m)v, v\rangle_H| \leq \|(a_n - a_m)v\| \leq \|a_n - a_m\| = \|r(a_n) - r(a_m)\| < \varepsilon$ ⇒ isometría en la imagen

y τ_w^v-continuo.

__Lemma__ Sea A un álgebra C^* y sea $\mu: A \to \mathbb{C}$ un funcional continuo t.q. $\mu(a^*) = \overline{\mu(a)}$, entonces existe un par de funcionales positivos μ_+ y μ_- t.q. $\mu = \mu_+ - \mu_-$ y $\|\mu_+\| + \|\mu_-\| \leq \|\mu\|$

__Ejemplo__ Sea A una C^*-álgebra conmutativa entonces $A \cong C^0(X)$ con X compacto y Hausdorff, entonces

$$A^\vee \leftrightarrow \{m: \Sigma \subseteq \underset{\text{Borel}}{\mathcal{B}(X)} \to \overline{\mathbb{R}} \mid m \text{ es signada y finita}\}$$

↳ ¿σ-álgebra más pequeña tal que todas las funciones continuas son medibles?

Los elementos positivos de $A^\vee$ son precisamente las medidas positivas en X y los estados son justamente medidas de probabilidad. El lema 2 expresa el hecho de que toda medida signada se puede obtener como diferencia de medidas positivas.

__Idea__ Si $\|\mu\| \leq 1$ entonces $\mu = p\nu_+ + q(-\nu_-)$ con $p + q = 1$ y $\nu_+, \nu_- \in S(A)$. ($\|\nu_+\| \leq 1$, $\|\nu_-\| \leq 1$ y $\nu_\pm(1) = 1$)

$\mu(1) = p\nu_+(1) + q(-\nu_-(1)) = p - q$ entonces $\|p\nu_+\| + \|q(-\nu_-)\| = p\|\nu_+\| + q\|\nu_-\| \leq p + q$

$\Rightarrow \|\mu\| \geq p - q$

Regresando a la construcción de EA. Tenemos un isomorfismo $EA \cong B^{\vee}$ y $B \cong A^{\vee}$ que juntos dan un isomorfismo de espacios de Banach $\boxed{\bar{\varphi} : A^{\vee\vee} \cong \underbrace{B^{\vee}}_{\text{funtor Dual}} \cong EA}$

el cual se puede ver en el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr, "\eta_A"] & \\
A^{\vee\vee} \arrow[rr, "\bar{\varphi}"] & & EA
\end{tikzcd}$$

Más aún, $\bar{\varphi}$ manda la topología ultradébil de EA a la topología débil-$*$ en $A^{\vee\vee} \cong B^{\vee}$.

Se puede verificar que $\bar{\varphi}$ es una isometría de espacios de Banach.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & EA \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & EA'
\end{tikzcd}$$

<u>Obs</u> Parece que esta construcción <u>NO</u> completó la construcción del funtor $E : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pues aunque se ha construido EA para cada A álgebra C^*, no se construyó $E(A \xrightarrow{f} A')$ para cualesquiera A, A' álgebras C^*, sólo para $A \xrightarrow{h} W$ cuando W y A es álgebra de von Neumann.

El ejemplo principal de la construcción hay que considerar lo siguiente:

<u>Ej</u> Sea $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ un álgebra de von Neumann y sea $I \subseteq A$ un ideal izquierdo. Decimos que I es un $*$-ideal si este es cerrado bajo $a \mapsto a^*$ (en cuyo caso I también será un ideal derecho).

Suponga que I es cerrado en la topología ultradébil, entonces $H \cong I_0 \oplus \overline{IH}$ donde:

$$I_0 := \{ v \in H \mid av = 0 \ \forall a \in I \}.$$

Podemos pensar a I como una $*$-álgebra sin no unital y que $\overline{IH}$ es una representación de I que es no degenerada, es decir: $I_0 = \{ v \in H \mid av = 0 \ \forall a \in I \} = \{0\}$ o IH es denso en $\overline{IH}$

Notemos que si $v \in I_0 \iff \langle a^* v, w \rangle = 0 \ \forall a \in I, \forall w \in H \iff \langle v, aw \rangle = 0 \ \forall a \in I, \forall w \in H$

$\iff I_0 = IH^{\perp} \Rightarrow H = I_0 \oplus \overline{IH}$.

Como I es ultradébil (y ultrafuerte) cerrado en $\mathcal{B}(\overline{IH})$ entonces I es un álgebra de von Neumann en $\mathcal{B}(\overline{IH})$, en particular debe contener el elemento identidad de $\mathcal{B}(\overline{IH})$ que se puede identificar con la proyección ortogonal en $\overline{IH}$, $pr_{\overline{IH}} \in \mathcal{B}(V)$.