Algebras de Von Neumann

Lectura 9

25-04-22

Algunos recordatorios:

- Sea $A \subseteq B(V)$ un álgebra de Von-Neumann (o de un álgebra $*$).
Sea $I \subseteq A$ un ideal izquierdo. Decimos que I es un $*$-ideal (ideal estrella) si es cerrado bajo la operación $a \mapsto a^*$. (De donde se sigue que I es también un ideal derecho).
Como ejemplo recordemos que los operadores de clase traza son un ideal estrella. $B^{tc}(V) \subseteq B(V)$.

- Vimos que si M es un espacio de Banach, y $A \subseteq M^\vee$ un subespacio cerrado en la topología débil $*$, entonces $A \simeq W^\vee$, para cierto espacio de Banach W.
  - Como caso especial, si $A \subseteq B(V)$ es un álgebra de Von Neumann, entonces existe una isometría $A \simeq W^\vee$ para algún espacio W

pues recordemos que la topología ultra débil coincide con la topología débil * (y A es cerrado en la topología ultra débil. (lec 5)).

- Más aún, recordemos que la envoltura $E(A)$ de un álgebra C^* A (cerradura $\bar{A}$ en la topología ultradébil) es tal que

$$E(A) \simeq W^\vee \quad y \quad W \simeq A^\vee$$

lo cual induce un isomorfismo de espacios de Banach

$$\bar{\rho} : A^{\vee\vee} \simeq W^\vee \simeq E(A)$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr, "\rho"] & \\ A^{\vee\vee} \arrow[rr, "\bar{\rho}"] & & E(A) \end{tikzcd}$$

Considerando la topología ultradébil en $E(A)$, a la topología débil estrella en $A^{\vee\vee} \simeq W^\vee$.

• Proposición: Sea $A \subseteq B(V)$ un álgebra de Von Neumann, y sea $I \subseteq A$ ideal cerrado en la topología ultra débil. Si e es la proyección ortogonal sobre $\overline{IV} \subset A$ (visto como elemento identidad de I en $B(V)$), entonces A se puede descomponer como el producto $I \times J$, donde $J = (1-e)A$

Demostración:

La lectura pasada vimos que $V \simeq V_0 \oplus \overline{IV}$

V_0: subespacio de V que consiste de los elementos que se hacen 0 bajo la acción de I en V.

Además, como I es cerrado en la topología ultradébil, entonces $I \subseteq B(\overline{IV})$ es un álgebra de Von Neumann que contiene la identidad de $B(\overline{IV})$, es decir, la proyección ortogonal $e \in B(V)$, sobre $\overline{IV}$.

Además, como I es ideal notemos que

$$AI = I \quad y \quad AIV \subseteq IV$$

de donde $\overline{IV} \subseteq V$, entonces $\overline{IV}$ es invariante bajo A, y como $A^* = A$, se sigue que $e \in A'$. //

- Observación: Sea A un álgebra C^* sin unidad. Podemos extenderla a un álgebra C^* con unidad: $\tilde{A}$. Para ver esto, sea $\tilde{A} = \mathbb{C} \oplus A$ como espacio vectorial. Definimos un producto en $\tilde{A}$, dado por $(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab)$ para $a, b \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

además, definimos $(\lambda, a)^* = (\bar{\lambda}, a^*)$.

Entonces, el elemento $(1,0)$ es una unidad para $\tilde{A}$. Además es obvio que el mapeo $\theta: A \to \tilde{A}$ dado por $a \mapsto (0, a)$ es un homomorfismo $*$ inyectivo de A en $\tilde{A}$. Además notemos que la imágen de A en $\tilde{A}$ es un ideal, y de aquí tenemos que $\tilde{A}/A \simeq \mathbb{C}$.

Además $\tilde{A}$ tiene una norma $\| \|'$ definida por

$$\|(\lambda, a)\|' = \sup\{|\lambda|, \|(\lambda, a)b\|, \|b(\lambda, a)\| \mid b \in A, \|b\| \leq 1\}$$

La cual junto con la involución dada arriba nos da un álgebra C^* (Theorem 1.8.1 [2]).

Obsercuación 2: Notemos que obtenemos una sec

$$0 \to A \xrightarrow{\theta} \tilde{A} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C} \to 0$$

la cuál, asuvez, induce la siguiente sec de espacios de Banach.

$$0 \longrightarrow A^{\vee\vee} \longrightarrow \tilde{A}^{\vee\vee} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

la cuál se sigue de las observaciones iniciales.

De esto se sigue que podemos ver a $A^{\vee\vee}$ como el kernel del homomorfismo de algebras de Von Neumann

$$\psi : E(\tilde{A}) \simeq \tilde{A}^{\vee\vee} \longrightarrow \mathbb{C}$$

determinado por ϕ.

- Las representaciones para un álgebra C^* A sin unidad, son equivalentes a las representaciones de $\tilde{A}$ como algebra C^* con unidad. la cuál es equivalente a las representaciones del algebra de Von Neumann $E(\tilde{A}) \simeq A^{\vee\vee} \times \mathbb{C}$.

donde la expresión $E(\widetilde{A}) \simeq A^{\vee\vee} \times \mathbb{C}$ se obtiene en analogía a la proposición anterior donde para un álgebra de UN $A \subseteq B(V)$ tenemos que $V \simeq V_0 \oplus \overline{IV}$, es decir $A^{\vee\vee} \times \mathbb{C}$ refleja que una representación V de A admite una descomposición

$$V \simeq \overline{AV} \oplus V_0$$

donde $\overline{AV}$ es una representación no degenerada de A y V_0 es una representación trivial de A. Con analogía a considerar $I = \ker(\varphi) \simeq A^{\vee\vee}$).

- Teorema: Sea A un álgebra C^* sin unidad. Entonces A^{**} admite la estructura de un algebra de Von Neumann.
  - Recordemos que I es álgebra de VN.

- Ejemplo: Sea V un espacio de Hilbert, y sea $K(V) \subseteq B(V)$ el espacio de operadores compactos en V.
  - $K(V)$ es un $*$-ideal en $B(V)$ el cual es cerrado en la topología inducida por la norma. En efecto, sean $f, g \in K(V)$, y $t \in B(V)$. Ahora, dada una sucesión $x_n \in V$, $\|x_n\| \leq C$, tomemos una subsucesión x_n' para la cual $f(x_n')$ converge, y después una sub-subsucesión x_n''

para la cual $g(x_n'')$ tambien converge. Entonces

$$(f+g)(x_n''),\quad cg(x_n'') \quad y \quad T(x_n'') \qquad c\in\mathbb{C}$$

convergen. El caso para la involución es análogo.

Sin embargo, $K(V)$ no es unitario, i.e, es un algebra C^* sin unidad.

Ahora consideremos el pairing $\quad B^{+c}(V)\times B(V)\longrightarrow\mathbb{C}$

$$(f,g)\longmapsto tr(fg)$$

donde $tr(f)=\sum \lambda_{v,w}(f(v),w)$

y nos restringimos a $\quad B^{+c}(V)\times K(V)\longrightarrow\mathbb{C}$

y como $K(V)$ ya es espacio dual, tenemos que el pairing restringido determina un mapeo $\quad B^{+c}(V)\longrightarrow K(V)^\vee$

- Se puede demostrar que $K(V)$ es denso en $B(V)$ en la topología ultra fuerte y que es una isometría suprayectiva, de donde se tienen isomorfismos

$$B^{tc}(V) \simeq K(V)^{\vee}$$

$$B(V) \simeq B^{tc}(V)^{\vee}.$$

De donde $B(V) \simeq K(V)^{\vee\vee}$, lo cual nos dice que $B(V)$ es la envolvente de $K(V)^{\vee\vee}$.

Definición:

Sea V un espacio de Hilbert, y $u \in B(V)$. Decimos que u es una isometría parcial si existe un subespacio cerrado $K \subset V$ tal que $u|_K$ es una isometría y $u|_{K^\perp} = 0$

— Proposición

Sea $u \in B(V)$, entonces, son equivalentes:

(a) $u = uu^*u$

(b) $p = u^*u$ es una proyección

(c) $u|_K$ es una isometría

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b): como $U = UU^*U$, entonces $p = p^*$, y $p^2 = U^*UUU^*$
$= U^*U = p$

entonces p es proyección

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea $K = \operatorname{ran}(p)$. Entonces notemos que para un elemento arbitrario $x \in V$, tenemos

$$\|px\|^2 = \langle px, x\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle = \|Ux\|^2$$

esto implica que $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} p = K^\perp$, y que U es isométrico en K (pues p es la identidad en K).

(c) $\Rightarrow$ (b): Sea $K = \operatorname{Ker}^\perp U$. Para $i = 1, 2$, supongamos $x_i \in V$, y $x_i \in K$, $y_i \in K^\perp$ son tales que $T_i = x_i + y_i$, entonces notemos que

$$\langle U^*U T_1, T_2\rangle = \langle U T_1, U T_2\rangle$$

$$= \langle U x_1, U x_2\rangle$$

$$= \langle x_1, x_2\rangle \quad \text{pues} \quad U|_K \text{ es isometría}$$

$$= \langle x_1, T_2\rangle$$

entonces U^*U es proyección sobre K.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $K = \operatorname{ran} U^*U$, entonces $K^\perp = \operatorname{Ker} U^*U = \operatorname{Ker} U$

pues para un elemento arbitrario $x \in V$ tenemos

$$\|Ux\|^2 = \langle U^*U x, x\rangle$$

$$= \langle (U^*U)^{1/2} x, (U^*U)^{1/2} x\rangle$$

$$= \|(U^*U)^{1/2} x\|^2$$

de donde se sigue que $\ker U = \ker (U^*U)^{1/2} = \ker (U^*U) = \operatorname{ran}^\perp UU^*$

Entonces, si $x \in K$, $y \in K^\perp$, son arbitrarios, y si

$T = x + y$, entonces, notemos que

$$UT = Ux + Uy = Ux = U(U^*Ux)$$

es decir $U = UU^*U$ //

- Definición: Sea V un espacio de Hilbert, y sea $f \in B(V)$. Se dice que f tiene una descomposición polar si puede escribirse como el producto UP, donde U es una isometría parcial y P es un operador no negativo.
    - Pensemos en la descomposición polar de una matriz $A = UP$, para este caso U es matriz unitaria, y P es matriz positiva semi-definita

Si, por ejemplo, la matriz A es real, la descomposición polar separa el producto en una rotación o reflexión (para el caso de U) y una reescala en los ejes para el caso de P.

Sea $A \subseteq B(V)$ un álgebra de VN.

Supongamos que A tiene operadores f, g tales que $f^*f = g^*g$, entonces, para cada vector $v \in V$, tenemos

$$(fv, fv) = (f^*fv, v)$$
$$= (g^*gv, v) = (gv, gv)$$

Entonces existe un mapeo bien definido $u_0 : fV \to gV$ dado por $u_0(fv) = gv$.

Este mapeo se extiende a un mapeo $\overline{fV} \to \overline{gV}$, donde la cerradura se toma con respecto a la topología ultrafuerte.

De esto se sigue que existe un mapeo $u : V \to V$ que coincide con u_0 en fV y se desvanece en $(fV)^\perp$.

dada la proposición anterior, podemos ver que u es una isometría parcial. Más aún, por la misma proposición, sabemos que u^*u y uu^* son proyecciones en V.

Ahora, si $T \in B(V)$ es un operador que a su vez pertenezca a A', entonces, si $v \in (fV)^\perp$, se sigue que

$$(fw, Tv) = (T^* fw, v) = (fT^* w, v) = 0$$

para todo $w \in V$, lo que implica que $Tv \in (fV)^\perp$.

De donde se sigue que

$$u(Tv) = 0 = Tu(v)$$

Además tenemos

$$uTf(v) = ufT(v) = gT(v) = Tg(v) = Tuf(v).$$

De donde se tiene que $Tu = uT$, y como esto es cierto para todo $T \in A'$, concluimos que $u \in A'' = A$

Notemos que u satisface $uf = g$. Resumiendo, obtenemos el siguiente resultado.

- Proposición: Sea A un álgebra de VN. que contiene elementos f, g con $f^* f = g^* g$. Entonces A contiene una isometría parcial u que satisface $uf = g$. Además, cada elemento $f \in A$ admite una descomposición $f = u|f|$. $\quad |f| = |f^* f|^{1/2}$

- En general se puede demostrar que todo elemento $v \in B(\mathcal{H})$ admite una descomposición polar única (Theorem 4.1.1 [1])

- Referencias:

[1] Lectures: Von Neumann algebras, Brent Nelson apr-17.

[2] Lecture notes on C*-algebras, Ian Putnam 2019