Lista 1. Espacios, mapeos y problemas topológicos

Homeomorfismos

1. Probar las siguientes afirmaciones:

   (a). Si X, Y son espacios topológicos y $A \subset X$, $B \subset Y$ subespacios, entonces en $X \times Y$ se cumple $\partial(A \times B) = \partial A \times \bar{B} \cup \bar{A} \times \partial B$.

   (b). Si $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son convexos, entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ también es convexo.

2. La *envoltura convexa de* $A \subset \mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A. Muestre que la envoltura convexa de un número finito de puntos $x_0, \ldots, x_q \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i$ con $\sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1$ y $\lambda_0, \ldots, \lambda_q \geq 0$.

3. Sea R la superficie generada por la rotación de la circunferencia $(x-2)^2 + z^2 = 1$ en el plano xz, alrededor del eje z. Muestre que:

   (a) R tiene ecuación $(\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$.

   (b) La función $S^1 \times S^1 \to R$ dada por $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \big((2+y_1)x_1, (2+y_1)x_2, y_2\big)$ es un homeomorfismo. Aquí $\vec{x} = (x_1, x_2)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2)$ representan puntos de S^1.

   (c) Si a R le adicionamos su "interior" en $\mathbb{R}^3$ obtenemos un *toro sólido* (volltorus) $V \subset \mathbb{R}^3$. Probar que la función dada en (b) se extiende a un homeomorfismo de $S^1 \times D^2$ en V; aqui $x \in S^1$ y $y \in D^2$.

4. Probar que, dados $x, y \in \mathring{D}^n$, existe un homeomorfismo $f : D^n \to D^n$ tal que $f(x) = y$.

Topología cociente.

5. Sean $(X_1, x_1^0), \ldots, (X_n, x_n^0)$ espacios topológicos con punto base y $\forall\, j = 1, \ldots, n$ sea $i_j : X_j \to X_1 \times \ldots \times X_n$ la inclusión $x_j \mapsto (x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0)$ cuya imagen es el *j-ésimo eje coordenado*: $T_j = x_1^0 \times \ldots \times x_{j-1}^0 \times X_j \times x_{j+1}^0 \times \ldots \times x_n^0$.

   Pruebe que el mapeo $(i_1, \ldots, i_n) : X_1 \vee \ldots \vee X_n \to X_1 \times \ldots \times X_n$ manda al espacio $X_1 \vee \ldots \vee X_n$ de manera homeomorfa sobre la unión $T = T_1 \cup \ldots \cup T_n$.

6. Probar que $(S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1)$ es homeomorfo a S^2.

7. Pruebe que $\mathbb{R}^n/D^n \approx \mathbb{R}^n$ y que el espacio cociente $\mathbb{R}^n/\mathring{D}^n$ no es Hausdorff.

8. Probar que toda función continua $f : X \to Y$ induce una función continua (bien definida) entre los conos $Cf : CX \to CY$ mediante la fórmula $(Cf)\langle x, t\rangle = \langle f(x), t\rangle$.

9. El espacio $\Sigma X = CX/X$ se conoce como *la suspensión de* X. Muestre que:

   (a) Todo mapeo $f : X \to Y$ induce un mapeo $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$.

   (b) $\Sigma D^n \approx D^{n+1}$ y $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.

Superficies

10. Construya una superficie cuya frontera consista de un número dado (finito o infinito) de copias de $\mathbb{R}$ y S^1.

11. Pruebe que, al identificar la frontera de una banda de Möbius a un punto, se obtiene un espacio homeomorfo el plano proyectivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

12. Muestre que *el doble* de la banda de Möbius es una botella de Klein: $2M \approx K$

13. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ la función $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Muestre que la imagen $f(S^2) \subset \mathbb{R}^4$ es homeomorfa al plano proyectivo.

14. Sean $A, B \subset S^1$ dos arcos de circunferencia disjuntos, ambos homeomorfos a I. En la suma topológica $I^2 + D^2$ identifiquemos el segmento $I \times 0$ con A y el segmento $I \times 1$ con B (por medio de homeomorfismos fijos), obteniendo así un espacio X (y diremos que X se construye a partir de D^2 pegando una banda). Muestre que X es un *anillo* (i.e. homeomorfo a $S^1 \times I$) o es una banda de Möbius.

15. ¿Qué superficies con frontera se obtienen al pegarle dos bandas al disco D^2?

16. *El plano con dos orígenes*. Consideremos el cociente de $\mathbb{R}^2 \times S^0$ bajo la relación de equivalencia que identifica el punto $(x, -1)$ con $(x, 1)$, para todo $x \neq 0$. Probar que el espacio cociente no es Hausdorff, pero que todo punto tiene una vecindad homeomorfa a D^2.

Variedades

17. Probar que si M es una variedad cerrada de dim. n, entonces $2(M \times I) \approx M \times S^1$.

18. Pruebe que toda 1-variedad conexa es homeomorfa a $\mathbb{R}$, S^1, I o $[0, \infty)$. Ver Fuks-Rohlin, Chapt. 3 §1, 15.

19. El disco D^3 se puede ver como todas las parejas (z, t) con $|z|^2 + t^2 \leq 1$, $z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$. Identificamos los puntos de la frontera de D^3 como sigue: el punto $(z, t) \in D^2_+$ se identifica con $(e^{2\pi i q/p} z, -t) \in D^2_-$ para todo $(z, t) \in D^2_+$. Probar que el espacio cociente $D^3/\sim$ es el espacio lente $L(p, q)$, definido en 1.5.12.

20. Probar que el espacio lente $L(2, 1)$ es homeomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

21. Muestre que si $q \equiv \pm q' \pmod{p}$ o $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$, entonces $L(p, q) \approx L(p, q')$.

22. Sea $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to S^2$ la función definida del siguiente modo: Para $x = \langle z, w \rangle \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ y $w = 0$, $f(x) \in S^2$ es el polo norte $N = (0, 0, 1)$; en otro caso $f(x) \in S^2$ es la imagen inversa del núm. complejo z/w bajo la proyección estereográfica. Pruebe que f es un homeomorfismo.

    Al identificar a S^2 con la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, este homemomorfismo suele escribirse como
    $$f\big(\langle z, w \rangle\big) = \begin{cases} z/w & \text{si } w \neq 0 \\ \infty & \text{si } w = 0. \end{cases}$$

Adjunción de celdas

18. Si $f : S^{n-1} \to D^{n-1}$ es la función $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$, pruebe que el espacio de adjunción $D^{n-1} \cup_f e^n$ es homeomorfo a S^n. ¿Cómo se ve este espacio en los casos $n = 0, 1$?

19. Construir un mapeo explícito $f : S^2 \to S^2 \vee S^1$ tal que el espacio $(S^2 \vee S^1) \cup_f e^3$ sea homeomorfo a $S^2 \times S^1$.

20. Sea $f : S^1 \to S^1 \cup D^1$ dada por:

$$f(e^{2\pi it}) = \begin{cases} e^{4\pi it} & 0 \leq t \leq 1/4, \\ 8t - 3 & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ e^{\pi i(2-4t)} & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ 8t - 7 & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Muestre que $(S^1 \cup D^1) \cup_f e^2$ es una banda de Möbius.

Grupos topológicos, acciones de grupos y espacios de órbitas

21. Pruebe que $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ por traslación $(n, x) \mapsto x + n$ y que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$.

22. Pruebe que $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por $(n, (x, y)) \mapsto (x + n, y)$ y que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \approx S^1 \times \mathbb{R}$.

23. Pruebe que $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por $(n, (x, y)) \mapsto (x + n, (-1)^n y)$ y que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ es homeomorfo al interior de la banda de Möbius $M \setminus \partial M$.

24. Pruebe que $\mathbb{Z}^2$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por $((m, n), (x, y)) \mapsto (x + m, y + n)$ y que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es homeomorfo al toro.

25. Sea G el subgrupo de los homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$, generado por los homeomorfismos $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ y $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. Muestre que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es una botella de Klein.

26. El grupo con dos elementos $S^0 = \{-1, 1\}$ puede actuar de distintas maneras sobre el toro T que se obtiene al rotar la circunferencia $(x - 3)^2 + z^2 = 1$ alrededor del eje z. Pruebe que:

    (a) Con la acción $(-1) \cdot (x, y, z) = (x, -y, -z)$, T/S^0 es una 2-esfera.
    (b) Con la acción $(-1) \cdot (x, y, z) = (-x, -y, z)$, T/S^0 es un toro.
    (c) Con la acción $(-1) \cdot (x, y, z) = (-x, -y, -z)$, T/S^0 es una botella de Klein.

27. Probar que $L_3(p; q, 1) \approx L(p, q)$ y que $L_{2k-1}(2; 1, \ldots, 1) \approx \mathbb{RP}^{2k-1}$.

Topología débil

28. Sea $x_n \in \bigcup_n \mathbb{R}^n$ el punto cuyas primeras n coordenadas son iguales a $1/n$ y el resto de las coordenadas son iguales a cero. Estudiar la convergencia de la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en $\bigcup_n \mathbb{R}^n$ con la topología inducida por la métrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_n (x_n - y_n)^2}$$

y en $\mathbb{R}^\infty$ con la topología débil.

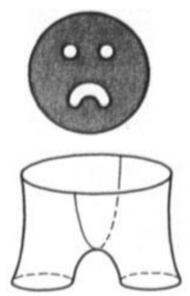
29. Probar la afirmación al final de 1.8.6: La función $f : \bigcup_n \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \ldots$ no es continua con respecto a la métrica euclidiana, aunque la restricción $f|_{\mathbb{R}^n}$ si es continua $\forall\, n$.

Homeomorfismos (continuación)

30. Ilustre el teorema de clasificación de superficies cerradas por medio de las siguientes afirmaciones/ejercicios:

    (a) Toda superficie cerrada esta determinada univocamente (salvo homemomorfismo) por su orientabilidad y su género

    (b) Al "duplicar" las superficies compactas con frontera en la figura siguiente se obtienen superficies orientables de géneros 2 y 3.



    (c) Probar que al eliminar un disco abierto *suficientemente pequeño* en un toro, se obtiene una superficie con frontera $\approx S^1$ y al pegar la frontera resultante con la frontera de una banda de Möbius, se obtiene la superficie N_3. En otras palabras, $T\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx N_3$.

    (d) Probar que $F_g\#N_h \approx N_{2h+h}$, para $g \geq 1$ y $h \geq 1$.

31. El teorema de clasificación de superfices se puede generalizar al caso de superficies compactas con frontera de la manera siguiente:

    (a) Si F es una superficie compacta con $\partial F \neq \varnothing$, entonces ∂F es la unión disjunta (suma topológica) de un número finito de círculos $S^1_1, \ldots, S^1_k$.

    (b) Al pegar un disco cerrado D^2_i a cada uno de estos círculos, por un homeomorfismo $\partial D^2_i \to S^1_i$, se obtiene una superficie cerrada $\hat{F}$, la cual está determinada unívocamente por F, salvo homeomorfismo. (De este modo se pueden definir el género y la orientabilidad de F: son los mismos que para $\hat{F}$.)

    (c) Las superficies compactas están clasificadas (salvo homeomorfismo) por su género, orientabilidad y número de componentes fronteras.