Lista 11. Propiedades Topológicas de las Esferas

1. Probar que si $m \neq n$, entonces $D^m \not\approx D^n$. (Sugerencia: Muestre que si $x_0 \in \partial D^n = S^{n-1}$, $D^n \setminus x_0$ es convexo.)

2. Sea M una variedad topológica de dimensión n. Probar que para $x_0 \in M$:
$$H_q(M, M \setminus x_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } x_0 \in \mathring{M} \text{ y } q = n \\ 0 & \text{si } x_0 \in \partial M \text{ ó } q \neq n. \end{cases}$$
El grupo $H_q(M, M \setminus x_0)$ es el *q-ésimo grupo de homología local de M en el punto x_0*. Este resultado muestra que los grupos de homología locales de una variedad distinguen a los puntos frontera de los puntos interiores.

3. Probar que dos variedades de dimensiones distintas no pueden ser homeomorfas y que todo homeomorfismo $M \to N$ de variedades manda ∂M de manera homeomorfa en ∂N.

4. Sean $f, g : S^n \to S^n$ dos mapeos tales que $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in S^n$. Demostrar que $f \simeq a \circ g$, donde $a : S^n \to S^n$ es el mapeo antipodal y por lo tanto
$$H_n(f) = (-1)^{n+1} H_n(g).$$
En particular, todo mapeo $f : S^n \to S^n$ sin puntos fijos es homotópico al mapeo antipodal.

5. Sea $f : S^n \to S^n$ un mapeo homótopico a un mapeo constante (por ejemplo cualquier mapeo que no sea suprayectivo). Entonces f tiene un punto fijo y también existe un punto $x \in S^n$ tal que $f(x) = -x$.

6. Todo mapeo $f : S^{2n} \to S^{2n}$ tiene un punto fijo ó bien, manda un punto en su antipodal.

7. Adaptar la construcción del campo vectorial tangente $\neq \vec{0}$ en S^{2n+1} para producir 3 campos vectoriales tangentes $\neq \vec{0}$, linealmente independientes en todo punto.

8. Construir 7 campos tangentes linealmente independientes en S^7 y 8 en S^{15}. ¿Puede encontrar un patrón general para producir el número de Hurwitz-Radon de campos linealmente independientes en S^n de la forma $(\pm x_{\sigma(1)}, \ldots, \pm x_{\sigma(n+1)})$, donde σ es una permutación de $(1, \ldots, n+1)$?

9. Sea G un grupo de homeomorfismos que actúa de manera libre en S^{2n}, i.e. para todo $g \in G$, $gx = x$ para algun $x \iff g = 1$. Probar que $|G| \leq 2$.

10. Probar que todo mapeo $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ tiene un punto fijo. Sugerencia: Use el ejercicio 3 y siguiente critero para la existencia de levantamientos

    Teorema (Greenberg-Harper 6.1): Consideremos la situación siguiente
$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$
    donde p es un recubrimiento y f es un mapeo arbitrario. Entonces existe un levantamiento f' de f (es decir $p \circ f' = f$) si y solo si $f_* \pi_1(Y, y_0) = p_* \pi_1(E, e_0)$.

11. Construir un mapeo $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$ sin puntos fijos.

12. Probar que la proyección canónica $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ no es nul-homótopica. Sugerencia: El teorema de levantamiento induce una biyección de conjuntos $[X, S^n] \to [X, \mathbb{R}\mathrm{P}^n]$ para todo X simplemente conexo.

13. Diremos que los mapeos $f, g : S^n \to S^n$ son *ortogonales* en un punto $x \in S^n$ si el producto interno (en $\mathbb{R}^{n+1}$) $f(x) \cdot g(x) = 0$. Probar que si $|\deg(f)| \neq |\deg(g)|$, entonces f y g son ortogonales en algún x.