Lista 2. Homotopía

Mapeos homotópicos

1. Sean $f, g : X \to S^n$ funciones continuas tales que $f(x) \neq -g(x)$, $\forall x \in X$. Mostrar que f y g son homotópicas.

2. Probar que $X \times Y$ es contraíble si y solo si X y Y son contraíbles.

3. Dos homeomorfismos $f, g : X \to Y$ son *isotópicos* si existe una homotopía $h_t : X \to Y$ entre f y g tal que h_t es un homeomorfismo, $\forall t \in I$. Muestre que toda rotación $f : S^1 \to S^1$ es isotópica a id_{S^1}.

4. De manera más general: Probar que toda transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con determinante 1, es isotópica al mapeo identidad de $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $f : D^n \to D^n$ un homeomorfismo tal que $f\,|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ y $f(0) = 0$. Demuestre que entonces f es isotópica a id_{D^n}. **Sugerencia:** Verificar que una tal isotopía $h_t : D^n \to D^n$ está dada por
$$h_t(x) = \begin{cases} t \cdot f(x/t) & \text{para } t \neq 0 \\ x & \text{para } t = 0. \end{cases}$$

6. Para $f, g : X \to S^1$ definimos la función $f \cdot g : X \to S^1$ por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, donde este último es el producto de números complejos. Muestre que el conjunto de clases de homotopía $[X, S^1]$ es un grupo abeliano con la operación $[f][g] = [f \cdot g]$.

7. El mapeo diagonal $d : X \to X \times X$ está dado por $d(x) = (x, x)$. Muestre que d es nulhomotópico si y solo si X es contraíble.

Mapeos de S^1 en S^1

8. Por el ejercicio 6, sabemos que el conjunto de clases de homotopía $[S^1, S^1]$ es un grupo. Probar que la *función grado* $\deg : [S^1, S^1] \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo.

9. Sea $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ un mapeo tal que $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^1$. Use el teorema de Borsuk-Ulam para probar que existe un punto $x \in D^2$ tal que $f(x) = 0$.

10. El ejercicio 9 es importante en *análisis*, ya que implica la existencia de soluciones para ciertos sistemas de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, muestre que el siguiente sistema posee al menos una solución:
$$\begin{aligned} x \cos y &= x^2 + y^2 - 1, \\ y \cos x &= \operatorname{sen} 2\pi(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

11. La esfera ∞-dimensional, $S^\infty = \lim S^n$, es homotópicamente más sencilla que S^1: a saber, es contraíble. Demostrar esta afirmación como sigue:

    (a). Sea $h_t : S^\infty \to S^\infty$ dada por:
$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \big(\, (1-t)x_1,\ tx_1 + (1-t)x_2,\ tx_2 + (1-t)x_3,\ \dots \,\big)/N$$

donde N es la norma del punto en el numerador. Muestre que h_t está bien definida y es una homotopía que satisface $h_0 = \mathrm{id}_{S^\infty}$ y $h_1(S^\infty) \subset A = \{x \in S^\infty \mid x_1 = 0\}$.

(b). Probar que la función $(0, x_2, x_3, \dots) \mapsto (t, (1-t)x_2, (1-t)x_3, \dots)/N$ define una homotopía $A \to S^\infty$ entre la inclusión (para $t = 0$) y un mapeo constante (para $t = 1$).

Extensión de mapeos y homotopías

12. Probar que X es contraíble si y solo si X es un retracto del cono CX.

13. Notemos que al aplicar el proceso ortonormalización de Grahm-Schmidt a los vectores columna de una matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$, se obtiene una matriz $A' \in O(n)$. Muestre que la función $A \mapsto A'$ define una retracción $GL(n, \mathbb{R}) \to O(n)$. Análogamente, muestre que $U(n)$ es un retracto de $GL(n, \mathbb{C})$.

14. Sea $r : D^n \times I \longrightarrow D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ el mapeo dado por:

$$r(x,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{|x|},\ 2 - \dfrac{2-t}{|x|} \right) & \text{si } |x| \geq 1 - t/2 \\[2ex] \left(\dfrac{2x}{2-t},\ 0 \right) & \text{si } |x| \leq 1 - t/2. \end{cases}$$

Probar que r es una retracción. Ilustrar para $n = 1, 2$.

Tipo de homotopía

15. Supongamos que $X \simeq Y$. Si X es conexo, arco-conexo, compacto, Hausdorff, ... ¿se cumple lo mismo para Y?

16. Probar que si $X_i \simeq Y_i$ entonces $X_1 \times X_2 \simeq Y_1 \times Y_2$.

17. Probar que el toro menos dos puntos tiene el mismo tipo de homotopía que $S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

18. Probar que $\mathbb{R}^3$ menos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, tiene el mismo tipo de homotopía que $S^1 \vee S^2$.

19. Probar que S^3 menos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = w = 0$, tiene el mismo tipo de homotopía que S^1.

20. Probar que si $X \simeq X'$ y $Y \simeq Y'$ entonces $[X, Y] \cong [X', Y']$.

21. Probar que el conjunto de clases de homotopía de (auto) equivalencias homotópicas de X

$$\mathcal{E}(X) = \{ [f] \mid f : X \xrightarrow{\simeq} X \}$$

es un grupo con la operación $[f] \cdot [g] = [f \circ g]$.

22. Probar que $\mathcal{E}(S^1)$ es un grupo cíclico de orden 2.

23. Probar que el cilindro del mapeo $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^2$, es una banda de Möbius.

24. Pruebe que para cualquier mapeo $f : S^{n-1} \to X$ se tiene $M_f/S^{n-1} \approx X \cup e^n$.

25. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la unión de los segmentos $I \times 0$, $0 \times I$ y $1/n \times I$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Probar que el punto $p = (0, 1)$ es un retracto por deformación de X, pero no es un *retracto fuerte por deformación* de X. Concluir que (X, p) no tiene la PEH.

26. Sea (X, p) como en el ejercicio anterior y $f : X \to X$ el mapeo constante de valor p. Mostrar que f y $f\mid_p$ son equivalencias homotópicas pero que $f : (X, p) \to (X, p)$ no es una equivalencia homotópica de parejas.

27. Refinar el resultado del ejercicio 13: Probar que $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ y $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ son retractos fuertes por deformación.