Lista 3. Complejos Simpliciales

Definiciones y ejemplos

1. Calcular las coordenadas baricéntricas del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con respecto a x_0, x_1, x_2 en los sigs. casos: $x_0 = (0,0), x_1 = (1,0), x_2 = (0,1)$ y $x_0 = (1,1), x_1 = (2,2), x_2 = (0,3)$.

2. Probar que los vértices de σ son precisamente los puntos de $\bar{\sigma}$ que no son puntos medios de algún segmento en $\bar{\sigma}$, es decir *los puntos extremos de* $\bar{\sigma}$.

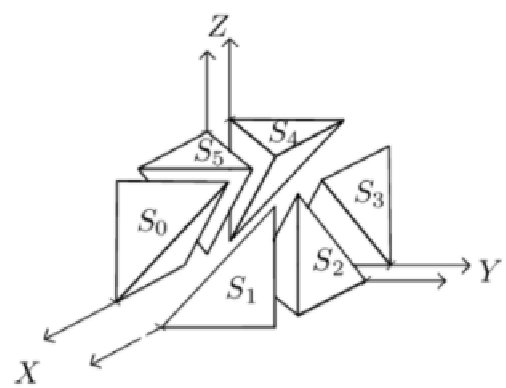
3. Demostrar que σ y $\bar{\sigma}$ son convexos y que $\bar{\sigma}$ es la envoltura convexa de σ.

4. Sean $\sigma = (x_0 \dots x_q)$ un q-simplejo y $\tau = (x_1 \dots x_q)$ la cara de σ opuesta a x_0. Probar que σ (resp. $\bar{\sigma}$) es la unión de todos los segmentos abiertos (resp. cerrados) entre x_0 y los puntos de τ (resp. $\bar{\tau}$) y que $\bar{\sigma}$ es homeomorfo al cono $C(\bar{\tau})$.

5. Se define el diámetro de σ por: $d(\sigma) = \sup\{ \|x - y\| \mid x, y \in \sigma\}$. Demostrar que $d(\sigma)$ coincide con la longitud de la arista más larga de σ.

6. Probar que la esfera S^{n-1} es homeomorfa a $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + \cdots + |x_n| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Concluya que S^{n-1} es un espacio triangulable.

7. Sea $e_i \in \mathbb{R}^n$ el i-ésimo vector canónico. Probar que si $(i_1, \dots, i_n)$ es una permutación de $(1, \dots, n)$, entonces los $n+1$ puntos $0, \quad e_{i_1}, \quad e_{i_1} + e_{i_2}, \quad \dots \quad, e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_n}$ en $\mathbb{R}^n$ generan un n-simplejo y que el conjunto de estos $n!$ simplejos (junto con sus caras) forman un complejo simplicial K tal que $|K| = I^n$.



8. Sea K un complejo simplicial en $\mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$. El *cono* $C(K, p)$ sobre K con vértice p consiste del 0-simplejo p, los simplejos de K y los simplejos de la forma $(p\, x_0 \dots x_q)$ con $(x_0 \dots x_q) \in K$. La *suspensión* de K es el "cono doble" $\Sigma K = C(K, p) \cup C(K, -p)$. Demostrar que $C(K, p)$ y ΣK son complejos simpliciales tales que $|C(K, p)| \approx C|K|$ y $|\Sigma K| \approx \Sigma|K|$.

9. Demostrar que el producto cartesiano de dos simplejos cerrados es un poliedro y que el producto cartesiano de dos poliedros es un poliedro.

10. Sea K un complejo simplicial de dimensión n y para $q = 0, \ldots, n$, denotemos por α_q el número de q-simplejos de K. Definimos la *característica de Euler* de K como el número:

$$\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^q \alpha_q.$$

Demostrar que:

a) Para toda triangulación K de S^1 se tiene $\chi(K) = 0$.

b) Para todo cono $L = C(K, p)$ (como en el ejercicio 8) se tiene $\chi(L) = 1$.

c) Para la suspensión ΣK del ejercicio 8, se tiene $\chi(\Sigma K) = 2 - \chi(K)$.

d) Si σ es un $(n+1)$-simplejo, entonces $\chi(\partial\sigma) = 1 + (-1)^n$.

e) Si K es el conjunto de todas las caras de dimensión $\leq q$ de un n-simplejo, entonces $\chi(K) = 1 + (-1)^q \binom{n}{q+1}$.

Subdivisión baricéntrica y aproximación simplicial

11. Demostrar que si $K_0 \subset K$ es un subcomplejo, entonces $K_0' \subset K'$ es un subcomplejo.

12. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_q$ un subconjunto de los vértices de K. Demostrar que: $St_K(x_0) \cap \ldots \cap St_K(x_q) \neq \varnothing$ si y solo si estos vértices generan un simplejo de K.

13. Un subcomplejo K_0 de K se dice *completo* si todo simplejo de K cuyos vértices pertenecen a K_0, es de hecho un simplejo de K_0. Pruebe que si K_0 es un subcomplejo arbitrario de K entonces K_0' es un subcomplejo completo de K'.

14. Sean $\sigma = (x_0 x_1 x_2)$ y $K = K(\partial\sigma)$ el complejo que consiste de todas las caras propias de σ. Sea $\varphi : S^1 \to |K|$ un homeomorfismo tal que $\varphi(1) = x_0$, $\varphi(i) = x_1$, $\varphi(-1) = x_2$. Construir una aproximación simplicial del mapeo $f = \varphi \circ g_n \circ \varphi^{-1} : |K| \to |K|$, donde $g_n(z) = z^n$.

Algunos resultados sobre deformaciones

18. Probar que para $n \neq 1$ se tiene $S^1 \not\approx S^n$.

19. Probar que para $n \neq 2$, se tiene $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{R}^n$.

20. Un espacio X se dice *n-conexo* si para $q \leq n$, todo mapeo $f : S^q \to X$ es nul-homotópico. Probar que:

a) S^n es $(n-1)$-conexo; S^∞ es n-conexo para todo n.

b) $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ es 1-conexo y $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ es 3-conexo.

c) La n-conexidad es un invariante homotópico