Lista 4. CW–Complejos

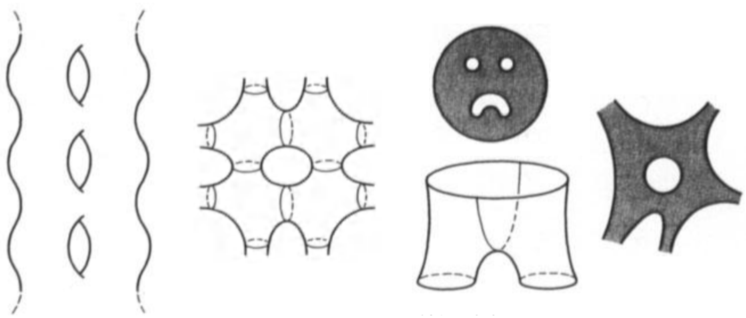
Definiciones y propiedades básicas

1. Para $n \in \mathbb{Z}$, consideremos el mapeo $g_n : S^1 \to S^1$ dado por $g_n(z) = z^n$. Al pegar a S^1 una 2-celda por medio de g_n, obtenemos un espacio denotado por $S^1 \cup_n e^2$. Probar que:

$$S^1 \cup_0 e^2 \approx S^1 \vee S^2, \qquad S^1 \cup_1 e^2 \approx D^2, \qquad S^1 \cup_k e^2 \approx S^1 \cup_{-k} e^2.$$

2. Para cada uno de los espacios siguientes, dar una descomposición celular con el menor número de celdas posible: D^n , $S^1 \times I$, la banda de Mobius, la superficie D_g^2 de 1.4.13. (a) (i.e. D^2 menos g discos abiertos, cuyas cerraduras son disjuntas y no interesectan a ∂D^2), el espacio $S^1 \cup_n e^2$ del ejercicio anterior.

3. Construir una descomposición celular para las superficies de la figura siguiente:



4. Construir una descomposición celular para S^n tal que $S^{n-1} \subset S^n$ sea un subcomplejo.

5. Sea $p \geq 2$ un entero. Probar que las siguientes celdas constituyen una estructura de CW-complejo para D^3: las 0-celdas $e_0^0, \ldots, e_p^0$ dadas por las raíces p-ésimas de la unidad en $S^1 \subset S^2 = \partial D^3$; las 1-celdas $e_1^1, \ldots, e_p^1$ dadas por los arcos en S^1 determinados por las raíces p-ésimas de la unidad; las 2-celdas dadas por los hemisferios $\mathring{D}_+^2$, $\mathring{D}_-^2$ en S^2 y finalmente, $\mathring{D}^3$ como única 3-celda.

6. Recordemos que el espacio lente $L(p, q)$ es un cociente de D^3 y sea $f : D^3 \to L(p, q)$ la proyeccion canónica (ver clase 3 y ejercicio 19, lista 1). Mostrar que la descomposición celular de D^3 del ejercicio 5 induce una descomposición celular de $L(p, q)$ como sigue:

   a) $e^0 = f(e_1^0) = \ldots = f(e_p^0)$ es una 0-celda.

   b) $e^1 = f(e_p^1) = \ldots = f(e_p^1)$ es una 1-celda y f mapea e_i^1 de manera homeomorfa sobre e^1.

   c) $e^2 = f(\mathring{D}_+^2) = f(\mathring{D}_-^2)$ es una 2-celda y f mapea cada hemisferio abierto de S^2 de manera homeomorfa sobre e^2.

   d) $e^3 = f(\mathring{D}^3)$ es una 3-celda y f mapea $\mathring{D}^3$ de manera homeomorfa sobre e^3.

   e) $L(p, q) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$ es un CW-complejo.

   f) Probar que el 2-esqueleto de $L(p, q)$ es la imagen de D_+^2 bajo f y es homeomorfo a el espacio $S^1 \cup_p e^2$, del ejercicio 1.

Construcción de CW-complejos

7. Probar que el producto $S^m \times S^n$ posee una estructura de CW-complejo con cuatro celdas, tal que $S^m \vee S^n$ es un subcomplejo de $S^m \times S^n$ y $S^m \times S^n = (S^m \vee S^n) \cup e^{m+n}$. Mostrar que el espacio cociente $(S^m \times S^n)/(S^m \vee S^n)$ es homeomorfo a S^{m+n}.

8. Probar que si X es un CW-complejo, entonces el cono CX y la suspensión ΣX también son CW-complejos.

9. Probar que si X y Y son CW-complejos y $f : X \to Y$ es un mapeo celular, entonces el cilindro del mapeo, M_f, también es un CW-complejo.

10. Probar que si X y Y son CW-complejos con una cantidad (a lo más) numerable de celdas, entonces $X \times Y$ también lo es, con respecto a la topología producto y la descomposición 4.2.9. (Sugerencia: X y Y se pueden expresar c/u como una unión numerable de CW-complejos).

Propiedades homotópicas de los CW-complejos

Los ejercicios 11-16 son aplicaciones del teorema de aproximación celular.

11. Probar que un CW-complejo X es arco-conexo si y solo si su 1-esqueleto X^1 es arco-conexo.

12. Sea X un CW-complejo y $x_0 \in X$ una 0-celda. Sea Y un CW-complejo conexo que no contiene 1-celdas (y por lo tanto tiene una sola 0-celda y_0). Sean $f, g : X \to Y$ mapeos tales que $f(x_0) = y_0$. Muestre que $f \simeq g$ implica $f \simeq g$ rel x_0.

13. Sea $n \geq 2$ un entero. Muestre que todo CW-complejo que no contiene celdas de dim. q para $0 < q < n$, es $(n-1)$-conexo.

    (**Definición:** Un espacio X se dice n-conexo si para $q \leq n$, todo mapeo $f : S^q \to X$ es nul-homotópico. Ver lista 3, último ejercicio)

14. Sea X un CW-complejo y consideremos a S^n con la estructura de CW-complejo $S^n = e^0 \cup e^n$. Muestre que:

    a) Si $\dim X < n$, entonces todo mapeo celular $f : X \to S^n$ es constante.
    b) Si $\dim X < n$, entonces todo mapeo $f : X \to S^n$ es nul-homotópico.

15. Si X es un CW-complejo, entonces para todo mapeo $f : X \to S^n$ existe un mapeo homotópico $g : X \to S^n$ tal que la restricción $g\,|_{X^{n-1}}$ es un mapeo constante.

16. Sea $S^n \times \ldots \times S^n$ el producto de $k \geq 2$ esferas de dimensión $n \geq 1$. Probar que:

    a) $S^n \times \ldots \times S^n$ es un CW-complejo con celdas en dimensiones $0, n, 2n, \ldots, kn$.
    b) El n-esqueleto de $S^n \times \ldots \times S^n$ es $S^n \vee \ldots \vee S^n$.
    c) Para todo mapeo $f : S^n \to S^n \times \ldots \times S^n$ existe un mapeo $g : S^n \to S^n \times \ldots \times S^n$, homotópico a f, tal que $g(e^0) = x_0$ y $g(S^n) \subset S^n \vee \ldots \vee S^n$ (donde e^0 es un punto dado de S^n y x_0 es el punto en común de la unión en un punto $\bigvee S^n$).
    d) Si $n \geq 2$ y $g_1, g_2 : S^n \to S^n \vee \ldots \vee S^n$ son mapeos tales que $g_1(e^0) = g_2(e^0) = x_0$ que son homotópicos en $S^n \times \ldots \times S^n$ (i.e. $i \circ g_1 \simeq i \circ g_2$, donde $i : S^n \vee \ldots \vee S^n \hookrightarrow S^n \times \ldots \times S^n$), entonces g_1 y g_2 son homotópicos en $\bigvee S^n$ con respecto a e^0.