Lista 5. El Grupo Fundamental

Propiedades generales del grupo fundamental

1. Sea $w : I \to X$ una trayectoria y $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$. Para $i = 1, \ldots, n$ sea $w_i : I \to X$ la trayectoria $w_i(t) = w(\,(1-t)\cdot t_{i-1} + t\cdot t_i\,)$. Muestre que $[w] = [w_1]\cdot[w_2]\cdot\ldots\cdot[w_n]$.

2. Para $u : I \to X$ trayectoria de x_0 a x_1, sea $u_+ : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ el isomorfismo de cambio de punto base.

   (a) Mostrar que si $u \simeq v$ rel ∂I, entonces $u_+ = v_+$.

   (b) Sean $x_0, x_1 \in X$, con X arco-conexo. Mostrar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y solo si los isomorfismos u_+ y v_+ son iguales para todas las trayectorias u, v de x_0 a x_1.

3. Sea $S^1 \vee S^1 = (S^1 \times 1) \cup (1 \times S^1)$ y $\nu : S^1 \to S^1 \vee S^1$ el mapeo $\nu(z) = (z^2, 1)$ si $z \in D^1_+$ y $\nu(z) = (1, z^2)$ si $z \in D^1_-$. Mostrar que:

   (a) Las sigs. funciones son homotópicas: $(\mathrm{id}, c)\circ\nu \simeq (c, \mathrm{id})\circ\nu \simeq \mathrm{id} : S^1 \to S^1$ rel 1, donde $c : S^1 \to S^1$ es el mapeo constante $c(S^1) = 1$ y $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{S^1}$.

   (b) Las sigs. funciones son homotópicas: $(\mathrm{id}, s)\circ\nu \simeq (s, \mathrm{id})\circ\nu \simeq c : S^1 \to S^1$ rel 1, donde $s : S^1 \to S^1$ es el mapeo $s(z) = z^{-1}$.

   (c) Las siguientes son homotópicas: $(\nu \vee \mathrm{id})\circ\nu \simeq (\mathrm{id} \vee \nu)\circ\nu : S^1 \to S^1 \vee S^1 \vee S^1$ rel 1.

4. Usar el ejercicio anterior para probar que $[S^1, 1; X, x_0]$ es un grupo con el producto dado por $[\varphi][\psi] = [(\varphi, \psi)\circ\nu]$ y que la biyección $[S^1, 1; X, x_0] \to \pi_1(X, x_0)$, del Teorema 5.1.11, es un isomorfismo.

5. Sea $f : \partial I^2 \to X$ un mapeo y para $j = 0, 1$ consideremos las trayectorias $u_j, v_j : I \to X$ dadas por: $u_j(s) = f(s, j)$ y $v_j(t) = f(j, t)$. Probar que las siguientes equivalentes:

   (i) f se puede extender a un mapeo $F : I^2 \to X$.

   (ii) $f : \partial I^2 \to X$ es nul-homotópico.

   (iii) $u_0 \cdot v_1 \simeq v_0 \cdot u_1$ rel ∂I.

6. Demostrar que si X un grupo topológico con elemento identidad e, entonces $\pi_1(X, e)$ es abeliano. (Sugerencia: Para $u, v : (I, \partial I) \to (X, e)$ sea $F : I^2 \to X$ el mapeo $F(s,t) = v(t)w(s)$, donde el lado derecho es el producto en X. Usar ele ejercicio anterior).

7. Probar que los espacios proyectivos $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ y $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ son simplemente conexos.

El grupo fundamental de S^1

8. Probar las siguientes afirmaciones:

   (a) Sea $w : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ un lazo basado. Entonces la clase $[w] \in \pi_1(S^1, 1)$ es un generador (de este grupo) si y solo si el índice de w es ± 1.

   (b) Si $v : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ es un homeomorfismo relativo, entonces v tiene índice ± 1 y por lo tanto $[v]$ es un generador de $\pi_1(S^1, 1)$.

9. Demostrar que para todo homomorfismo $\varphi : \pi_1(S^1 \times S^1, z_0) \to \pi_1(S^1 \times S^1, z_0)$ existe un mapeo $f : (S^1 \times S^1, z_0) \to (S^1 \times S^1, z_0)$ tal que $f_\# = \varphi$. Más aún, probar que cuando φ es un isomorfismo, f se puede elegir como un homeomorfismo.

10. Sea $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ el toro de dimensión n. Probar que si $n \neq m$ entonces $T^n \not\approx T^m$.

11. Sea M una banda de Möbius y $f : S^1 \to \partial M$ un homeomorfismo. Notemos que la trayectoria $w : I \to M$ dada por $w(t) = f(e^{2\pi i t})$, representa un elemento $\beta \in \pi_1(M, x_0)$, donde $x_0 = f(1) \in \partial M$. Mostrar que $\beta = \alpha^2$ para un generador apropiado $\alpha \in \pi_1(M, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Concluir de aquí que ∂M no es un retracto de M.

12. Probar las siguientes afirmaciones:

    (a) Si $x_0 \in S^1 \subset D^2$, entonces $D^2 \setminus x_0$ es simplemente conexo.

    (b) Si $x_0 \in \mathring{D}^2$, entonces $D^2 \setminus x_0$ no es simplemente conexo.

    (c) Todo homeomorfismo $f : D^2 \to D^2$ mapea S^1 sobre S^1.

    Esto prueba el Teorema 1.1.18 en el caso $n = 2$ (Tma. de la invarianza de la frontera).

El teorema de Seifert - Van Kampen

13. Probar las siguientes afirmaciones sobre el orden de los elementos de $G_1 * G_2$:

    (a) Si $g \in G_1 * G_2$ tiene orden finito, entonces $g \in G_1$ ó $g \in G_2$ ó bien g es conjugado a un elemento de G_1 ó G_2. (Sugerencia: Inducción sobre n, la longitud de la representación reducida de la palabra g).

    (b) Si $G_1 \neq 1$, $G_2 \neq 1$, entonces $G_1 * G_2$ contiene elementos de orden infinito.

14. Probar que si $H_1 \subset G_1$ y $H_2 \subset G_2$ son subrgrupos, entonces $H_1 * H_2$ es un subgrupo de $G_1 * G_2$ (pero no todos los subgrupos de $G_1 * G_2$ son de esta forma, ver el ejercicio siguiente y el Tma. 6.9.5).

15. Sean $a, b \in \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ los generadores del primer y segundo factor, respectivamente. Probar que el subgrupo generado por el elemento ab tiene indice 2 y por lo tanto es un subgrupo normal de $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$. Concluya que dicho subgrupo no es de la forma $H_1 * H_2$, con $H_i \subset G_i = \mathbb{Z}/2$.

16. Se define el *centro* de un grupo G como el conjunto $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall g \in G\}$. Mostrar que $Z(G)$ es un subrupo normal de G. Probar que si $G_1 \neq 1$ y $G_2 \neq 1$ entonces $Z(G_1 * G_2) = 1$.

17. Sean $\varphi_1 : G_1 \to G$ y $\varphi_2 : G_2 \to G$ homomorfismos de grupos con la siguiente propiedad: Para todo grupo H y todo par de homomorfismos $f_1 : G_1 \to H$ y $f_2 : G_2 \to H$, existe un único homomorfismo $f : G \to H$ tal que $f_1 = f \circ \varphi_1$ y $f_2 = f \circ \varphi_2$.

    Probar que $G \cong G_1 * G_2$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[drr, bend left, "f_1"] & & \\
& G \arrow[r, dashed, "\exists!\, f"] & H \\
G_2 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[urr, bend right, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

18. Probar que la suspensión ΣX de un espacio arco-conexo X es simplemente conexo. (Sugerencia: Expresar a ΣX como la unión de dos abiertos simplemente conexos con intersección arco-conexa).

19. Sean M una n–variedad conexa, con $n \geq 3$, $f : D^n \to M$ un encaje (homeomorfismo sobre su imagen) y $\mathring{D}_1 = \{f(x) \mid 0 \leq \|x\| < \frac{1}{2}\}$. Pongamos $M^* = M \setminus \mathring{D}_1$. Probar que $\pi_1(M^*) \cong \pi_1(M)$. (Sugerencia: Expresar $M = U \cup V$ como en 5.3.12 con $V \approx \mathring{D}^n$, $U \cap V \simeq S^{n-1}$ y $M^* \subset U$ un retracto por deformación.)

20. Sean M y N dos n–variedades conexas, con $n \geq 3$. Probar que el grupo fundamental de la suma conexa es: $\pi_1(M \# N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$. (Sugerencia: Usar el ejercicio anterior.)

Aplicaciones del teorema de Seifert - Van Kampen

21. Probar que $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, el producto libre de dos grupos cíclicos infinitos (ambos denotados por $\mathbb{Z}$). Representar a toda palabra reducida de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ como la clase de homotopía de un lazo basado en $S^1 \vee S^1$.

22. Sea $Y_m = S^1 \vee \ldots \vee S^1$ (m sumandos). Probar que $\pi_1(Y_m, x_0) = \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z} = F_m$, el producto libre de m copias de $\mathbb{Z}$. Generalizar la representación de las palabras reducidas (del ejercicio anterior) a este caso.

23. Sea $Z_m = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ donde $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^2$ son puntos distintos (Z_m est unívocamente determinado por m, salvo homeomorfismo). Mostrar que:

    (a) Z_m contiene un retracto fuerte por deformación homeomorfo a Y_m.

    (b) $\pi_1(Z_m) \cong F_m$.

    Aquí F_m y Y_m son como en el ejercicio anterior. Demostrar además que Z_m y Z_n no son homeomorfos si $m \neq n$; para esto se puede probar antes que los grupos F_m y F_n no son isomorfos si $m \neq n$. (En caso de no tener idea, ver: 5.5.7)

24. Calcular los grupos fundamentales de:

    (a) $S^1 \vee S^2$, $S^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

    (b) $\mathbb{R}^3 \setminus K_0$ donde K_0 es la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. (Comparar con el ejercicio 18, lista 2).

    (c) $(S^1 \times S^1) \cup e^2$, donde la 2-celda está pagada por el mapeo $z \mapsto (z^2, z^3)$.

25. Probar que el grupo fundamental de la unión en un punto $X \vee Y$ de dos CW-complejos conexos, tales que $\pi_1(X) \neq 1 \neq \pi_1(Y)$, tiene centro trivial y no es abeliano.

26. Sea Y la unión de las circunferencias $(x-2)^2 + z^2 = 1$ y $(x-4)^2 + z^2 = 1$ en el plano xz en $\mathbb{R}^3$ y $X \subset \mathbb{R}^3$ el espacio que se obtiene por la rotación Y alrededor del eje z (X es la unión de dos toros con una circunferencia en común). Muestre que $\pi_1(X)$ no es abeliano.

Grupos libres y grafos

27. Sea G un grupo libre de rango ≥ 2. Muestre que:

    (a) El centro de G es trivial.

    (b) G no contiene elementos de orden finito (distintos de la identidad).

    (c) Si $x, y \in G$ son tales que $xy = yx$, entonces existe un elemento $z \in G$ tal que x y y son potencias de z.

28. Probar que si G_1 y G_2 son grupos abelianos, entonces $(G_1 * G_2)_{ab} \cong G_1 \oplus G_2$.

29. Sean G un grupo con al menos dos elementos $g, g_1 \neq 1$ y H un grupo con al menos un elemento $h \neq 1$. Sea $K \subset G * H$ el subgrupo generado por $x = ghg^{-1}h^{-1}$ y $x_1 = g_1hg^{-1}h^{-1}$. Probar que K es un grupo libre, generado libremente por $\{x, x_1\}$.

30. Sea X el grafo que consiste de los vértices y las aristas de un n-simplejo. Exhibir un árbol maximal para X y calcular $\pi_1(X)$.

31. Probar que todo CW-complejo de dimensión 1 tiene el tipo de homotopía de un wedge de círculos $\bigvee_\alpha S^1$ o de un punto.

Presentaciones de grupos

32. Probar las siguientes afirmaciones:

    (a) $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

    (b) $\langle x, y \mid x^n,\, xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}/n \oplus \mathbb{Z}$.

    (c) $\langle x, y \mid x^m,\, x^n,\, xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}/d \oplus \mathbb{Z}$ donde $d = \mathrm{mcd}(m, n)$.

    (d) $\langle x, y \mid x^m,\, y^n \rangle \cong \mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/n$.

    (e) $\langle x, y \mid xy^m \rangle \cong \mathbb{Z}$.

    (f) $\langle x, y \mid xy^m,\, xy^n \rangle \cong \mathbb{Z}/d$ donde $d = \mathrm{mcd}(m, n)$.

    (g) $\langle x, y \mid x^2y^3,\, x^3y^4 \rangle = 1$.

33. Sea $G_{p,q} = \langle x, y \mid x^py^q \rangle$ con $p, q \geq 2$. Muestre que:

    (a) El elemento $x^p = y^{-q} \in G_{p,q}$ pertenence al centro de $G_{p,q}$ y el subgrupo H generado por dicho elemento es normal en $G_{p,q}$.

    (b) $G_{p,q}/H \cong \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q$.

    (c) H es el centro de $G_{p,q}$ (Sugerencia: (b) y ejercicio 16).

    (d) $G_{p,q}$ es libre de torsion (Sugerencia: (b) y ejercicio 13).

    (e) Si $2 \leq p \leq q$, $2 \leq r \leq s$ y $G_{p,q} \cong G_{r,s}$ entonces $p = r$ y $q = s$. (Sugerencia: ejercicios 13 y 28).

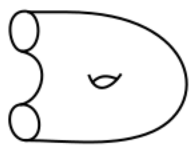
34. Sea G el grupo en el ejercicio 26, lista 1 (grupo de la botella de Klein). Probar que $G = \langle s, t \mid tst^{-1}s \rangle$, donde $s, t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son los homeomorfismos definidos en dicho ejercicio.

Ejemplos de grupos fundamentales

35. Probar que para $g \geq 1$, el grupo fundamental de S_{g+1} se puede expresar como un producto amalgamado de la forma $\pi_1(S_{g+1}) = \langle \alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_g, \beta_g \mid - \rangle *_A \langle \alpha_{g+1}, \beta_{g+1} \mid - \rangle$. Describir A y dar los detalles. Concluir que $\pi_1(S_{g+1})$ es libre de torsión (el caso $\pi_1(S_1)$ es claro). Dar una expresión analoga para $\pi_1(N_g)$ y demostrar que $\pi_1(N_g)$ es libre de torsión para $g \geq 2$ (para $g = 1$ esto no es cierto).

36. Sea $S_{g,n}$ la superficie S_g menos n discos abiertos disjuntos, de modo que $S_{g,n}$ es una superficie con n componentes frontera, cada una homeomorfa a S^1 (ver 1.4.7).

    Ejemplos:

    $S_{1,2}$

    $S_{2,1}$

    Probar que:

    (a) $\pi_1(S_{g,n}) = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g \mid \prod_{j=1}^{n} \sigma_j \prod_{k=1}^{g} (\alpha_k \beta_k \alpha_k^{-1} \beta_k^{-1}) \rangle$, donde los σ_j están dados por las curvas frontera (unidas al punto base por curvas auxiliares).

    (b) Ningúno de los σ_j es una potencia de algún otro elemento, lo que también suele expresarse como: "ninguna curva frontera es potencia de alguna otra curva".

    (c) Enunciar los resultados correspondientes para las superficies no orientables N_g. Nótese que hay una excepción a (b).

37. Este ejercicio explica como contruir una n-variedad ($n \geq 4$) con un grupo fundamental dado $G = \langle s_1, \ldots, s_k \mid r_1, \ldots, r_\ell \rangle$. Justifique heurísticamente los siguientes afirmaciones:

    (a) La suma conexa $M = (S^1 \times S^{n-1}) \# \ldots \# (S^1 \times S^{n-1})$ de k copias de $S^1 \times S^{n-1}$ (para $n \geq 4$) tiene grupo fundamental $\pi_1(M) = \langle s_1, \ldots, s_k \mid - \rangle$.

    (b) Para todo $r \in \pi_1(M)$ existe un encaje $f : S^1 \times D^{n-1} \to M$ tal que el lazo $t \mapsto (f(e^{2\pi i t}), 0)$ representa la clase de homotopía r.

    (c) $M_1 = M \setminus f(S^1 \times D^{n-1})$ y M tienen grupos fundamentales isomorfos.

    (d) Pegar $D^2 \times S^{n-2}$ y M_1 por sus fronteras usando el homeomorfismo $(x, y) \mapsto f(x, y)$, para obtener una variedad M' con $\pi_1(M') \cong \langle s_1, \ldots, s_k \mid r \rangle$.

    (e) Iterando esta construcción, se obtiene una variedad con un grupo fundamental dado $G = \langle s_1, \ldots, s_k \mid r_1, \ldots, r_\ell \rangle$