Lista 7. Grupos de Homología de Complejos Simpliciales

Definición de los grupos de homología

1. Justificar la siguiente definición alternativa de q-cadenas: Una q-cadena en K es una función c que asigna, a todo q-simplejo orientado σ de K, un número entero y satisface $c(-\sigma) = -c(\sigma)$.

2. Sean σ un $(q+1)$-simplejo orientado y τ un q-simplejo orientado de K. Se define el *número de incidencia* $[\sigma : \tau]$ como $1, -1$ ó 0, si τ aparece (como cara de σ) en $\partial\sigma$ con la orientación inducida, con la orientación opuesta o no aparece. Probar que $\partial\sigma = \sum_\tau [\sigma : \tau] \cdot \tau$.

3. Sean α_q, β_q y γ_q los rangos de los grupos abelianos libres $C_q(K)$, $B_q(K)$ y $Z_q(K)$, respectivamente. Mostrar que $\alpha_q = \gamma_q + \beta_{q-1}$ (Sugerencia: 8.1.7 (b)).

4. Probar adicionalmente que $\gamma_q = p_q + \beta_q$, donde p_q es el q-ésimo número de Betti de K.

5. Usar los ejercicios 3 y 4 para probar que la característica de Euler de K (definida en el ejercicio 10, Lista 3) está dada por: $\chi(K) = p_0 - p_1 + p_2 - \ldots + (-1)^n p_n$.

Ejemplos de grupos de homología

6. Un complejo simplicial Kde dimensión 1 que no contiene 1-ciclos $\neq 0$, se llama un *árbol (simplicial)*. Muestre que K es un árbol si y solo si el número de vértices de K es igual al número de aristas más 1.

7. Sea $K = K_q$ el conjunto de todos las caras de dimensión $\leq q$ de un n-simplejo (K es el q-esqueleto de tal n-simplejo), con $1 \leq q \leq n-1$. Mostrar que:

   (a) Para $i = 1, \ldots, q-1$ se tiene $H_i(K) = 0$.

   (b) $H_q(K)$ es abeliano libre de rango $\binom{n}{q+1}$. (Sug.: ejercicio 10(e) Lista 3 y ejercicio 5)

8. Para $n \geq 2$, construir un complejo simplicial K_n de dimensión 2 con números de Betti $p_0 = p_2 = 1$ y $p_1 = n$. Mostrar que K_n contiene al menos $n+6$ aristas. ¿Se puede construir K_n con exactamente $n+6$ aristas?

9. Obsérvese que al identificar (en el mismo sentido) todas las aristas de un k-ágono regular ($k \geq 3$), se obtiene el espacio $X_k = S^1 \cup_k e^2$ donde la 2-celda está pegada por un mapeo de grado k. Construir una triangulación L_k de X_k y probar que $H_1(L_k) \cong \mathbb{Z}/k$ y $H_2(L_k) = 0$. ¿Qué 1-ciclo representa un generador para este grupo?

10. **El isomorfismo suspensión**. Sea ΣK la suspensión de K (ver ejercicio 8, Lista 3). Para toda q-cadena c de K considérese la $(q+1)$-cadena $\Sigma c = p * c - p' * c$, donde $p' = -p$ (ver demostración del Tma. 7.2.7). Muestre que la correspondencia $\{z\} \mapsto \{\Sigma z\}$ define un isomorfismo $S : H_q(K) \xrightarrow{\cong} H_{q+1}(\Sigma K)$ para $q > 0$. Más aún, pruebe que si K es conexo, entonces $H_1(\Sigma K) = 0$.

11. Sea K el complejo simplicial dado por la unión de dos complejos simpliciales K_1 y K_2 tales que $K_1 \cap K_2$ es un vértice ("wedge simplicial"). Probar que $H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus H_q(K_2)$ para todo $q > 0$. ¿Qué sucede en el caso $q = 0$?

12. Sea G un grupo abeliano finitamente generado y $n \geq 1$ un entero. Use los tres ejercicios anteriores para probar que existe un complejo simplicial conexo K tal que $H_n(K) \cong G$ y $H_q(K) = 0$ para $q \neq 0, n$ (Sugerencia: Teorema 8.13).

13. Probar que para toda sucesión finita $G_1, \ldots, G_n$ de grupos abelianos finitamente generados, existe un complejo simplicial K tal que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ y $H_q(K) \cong G_q$, para $q = 1, \ldots, n$ y $H_q(K) = 0$ para $q > n$.

14. ¿Cuáles son los grupos de homología de los siguientes espacios: $S_1^2 \vee \ldots \vee S_n^2$, $S^2 \cup D^1$, $S^2 \cup D^2$, $S^2 \cup \{x \in D^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\}$ y $S^2 \vee S^1$?

Mapeos simpliciales y homomorfismos inducidos

15. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\varphi : K \to K$ es la identidad, entonces $\varphi_\bullet : C_q(K) \to C_q(K)$ y $\varphi_* : H_q(K) \to H_q(K)$ son las identidades de los grupos respectivos.

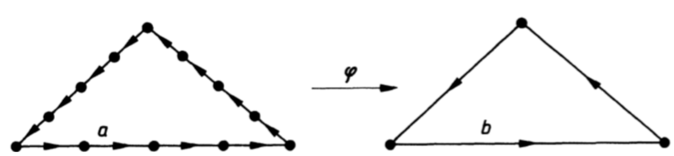
(b) Si $\varphi : K \to L$ y $\psi : L \to M$ son mapeos simpliciales entre complejos simpliciales entonces $(\psi\varphi)_\bullet = \psi_\bullet \varphi_\bullet : C_q(K) \to C_q(M)$ y $(\psi\varphi)_* = \psi_* \varphi_* : H_q(K) \to H_q(M)$.

(c) Si $\varphi : K \to L$ es un isomorfismo (de complejos simpliciales), entonces $\varphi_\bullet : C_q(K) \to C_q(L)$ y $\varphi_* : H_q(K) \to H_q(L)$ son isomorfismos de grupos.

(d) Si $\varphi : K \to L$ es un mapeo simplicial arbitrario con K y L conexos, entonces $\varphi_* : H_0(K) \to H_0(L)$ es un isomorfismo.

(e) Si $\varphi : K \to L$ es un mapeo simplicial constante, entonces $\varphi_* = 0 : H_q(K) \to H_q(L)$ es el homomorfismo trivial para todo $q \neq 0$.

(f) Sea $K = K(\partial\sigma_2)$ el complejo simplicial que corresponde a la frontera (geométrica) de un 2-simplejo como y $K^{(n)}$ la n-ésima subdivisión baricéntrica de K, con $n \geq 1$ un natural fijo. Entonces $H_1(K^{(n)})$ y $H_1(K)$ son grupos cíclicos infinitos con generadores dados por los ciclos a y b de la figura siguiente



Probar que si $\varphi : K^{(n)} \to K$ un mapeo simplicial, entonces $\varphi_*(a) = mb$ para un entero m con $-2^n \leq m \leq 2^n$. Explique como obtener estos valores con una elección adecuada de φ.

16. Sea $\varphi : K \to L$ un mapeo simplicial. Probar que: φ induce un mapeo simplicial entre las suspensiones $\Sigma\varphi : \Sigma K \to \Sigma L$ (Lista 3, ejercicio 8) tal que $(\Sigma\varphi)_* \circ S = S \circ \varphi_*$, donde S es el isomorfismo suspensión del ejercicio 10.

17. Probar que dados dos enteros m, n con $n \geq 1$, existen complejos simpliciales K y L y un mapeo simplicial $\varphi : K \to L$ tales que:

(a) $|K| \approx |L| \approx S^n$ y $H_n(K) \cong H_n(L) \cong \mathbb{Z}$.

(b) $\varphi_* : H_n(K) \to H_n(L)$ es multiplicación por m.

(Sugerencia: Usar el ejercicio anterior y el ejercicio 15 (f))

Grupos de homología relativos

18. Sean $K \subset L \subset M$ complejos simpliciales y $c \in C_q(M)$ una cadena que es un ciclo relativo módulo K y que es una frontera relativa módulo L. Probar que c es homólogo en M módulo L, a un ciclo relativo en L módulo K.

    Sugerencia: Para evitar problemas con el lenguaje, trabajar sobre el sig. diagrama conmutativo, donde las flechas horizontales son las inclusiones y las proyecciones canónicas.

$$\begin{tikzcd}
C_{q+1}(L)/C_{q+1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}_{q+1}"] & C_{q+1}(M)/C_{q+1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}_{q+1}"] & C_{q+1}(M)/C_{q+1}(L) \arrow[d, "\bar{\partial}_{q+1}"] \\
C_q(L)/C_q(K) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}_q"] & C_q(M)/C_q(K) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}_q"] & C_q(M)/C_q(L) \arrow[d, "\bar{\partial}_q"] \\
C_{q-1}(L)/C_{q-1}(K) \arrow[r] & C_{q-1}(M)/C_{q-1}(K) \arrow[r] & C_{q-1}(M)/C_{q-1}(L)
\end{tikzcd}$$

19. Probar que $H_0(K, K_0)$ es un grupo abeliano libre y que su rango es el número de componentes conexas de K que no intersectan a K_0.

20. Analizar la sucesión exacta en homología de (K, K_0) en los casos: $K_0 = \varnothing$, $K_0 = K$ y $K_0 =$ un vértice de K.

21. Sea CK el cono sobre K (Lista 3, ejercicio 8). Mostrar que en la sucesión exacta en homología de (CK, K), el homomorfismo de conexión $\partial_* : H_q(CK, K) \to H_{q-1}(K)$ es un isomorfismo para $q > 1$. ¿Qué sucede en el caso $q = 1$?

22. Supongamos que el complejo simplicial $K = K_1 \cup K_2$ es unión de dos subcomplejos K_1 y K_2. La correspondiente *sucesión de Mayer-Vietoris* está dada por

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\mu} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\nu} H_q(K) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\mu} \ldots$$

    donde los homomorfismos se definen como sigue:

    $\mu : \{z\}_{K_1 \cap K_2} \mapsto (\{z\}_{K_1}, -\{z\}_{K_2})$

    $\nu : (\{z_1\}_{K_1}, \{z_2\}_{K_2}) \mapsto \{z_1 + z_2\}_K$

    $\Delta : \{z\}_K \mapsto \{\partial x_1\}_{K_1 \cap K_2}$, donde $z = x_1 + x_2$ con $x_i \in C_q(K_i)$

    (Notemos que $z = x_1 + x_2$ implica $0 = \partial x_1 + \partial x_2$).

    Probar que μ, ν y Δ están bien definidos y que la sucesión anterior es exacta (como se hace explícitamente en el Teorema 7.4.5).

23. Analizar la sucesión de Mayer-Vietoris en los casos $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ y $K_1 \cap K_2 =$ un vértice de K.

24. Exprese a la suspensión ΣK como la unión de dos conos y analice la correspondiente sucesión de Mayer-Vietoris. Muestre que $\Delta : H_{q+1}(\Sigma X) \to H_q(X)$ es un isomorfismo para $q > 0$ y que Δ es el inverso del isomorfismo suspensión del ejercicio 10.