Lista 8. Introducción al Algebra Homológica

Grupos Abelianos

1. Probar que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ o de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cíclico.

2. Comprobar las siguientes afirmaciones:

   (a) Los coeficientes de torsión de $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{60}$ son 4, 60 y 120.

   (b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ tiene tres coeficientes de torsión de valor 2.

   (c) Si $p_1, \ldots, p_n$ son primos distintos, entonces $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_n}$ tiene un único coeficiente de torsión igual a $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

   (d) Si G tiene coeficientes de torsión $t_1 \mid \ldots \mid t_r$, con t_r impar, entonces el grupo $G \oplus \mathbb{Z}/2$ tiene coeficientes de torsión $t_1, \ldots, t_{r-1}, 2t_r$.

3. Expresar los siguientes grupos como en el Teorema 8.1.14:

   (a) $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4a + 3b + 5c = 0\}$.

   (b) $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid 6a + 4b = 3c + 7d = 0\}$.

4. Probar que los grupos S^1 y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son isomorfos.

5. Probar que $\mathbb{Z}_m/n \cdot \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$, donde $d = \text{mcd}(m, n)$.

6. Probar que si $H_i \subset G_i$, entonces $(\bigoplus G_i)/(\bigoplus H_i) \cong \bigoplus(G_i/H_i)$.

7. Probar que los subgrupos y los cocientes de un grupo abeliano f. g., son fin. generados.

8. Probar que el Teorema 8.1.7 (b) se cumple para grupos abelianos f. g. cuando se cambia **rango** por **número de Betti**.

9. Supongamos que el homomorfismo $f : G \to H$ posee un inverso por la derecha, i.e. existe un homomorfismo $f' : H \to G$ tal que $f \circ f' = \text{id}_H$. Probar que la función $(h, g) \mapsto f'(h) + g$ define un isomorfismo $H \oplus \ker f \xrightarrow{\cong} G$.

10. Probar que si G y G' son grupos abelianos f. g. tales que $G \oplus G' \cong G$, entonces $G' = 0$. Muestre que este resultado no es cierto (en general) para grupos que no sean f. g.

11. Supongamos que $f : G \to G$ es un homomorfismo, de un grupo abeliano f. g. en sí mismo, que posee un inverso por la derecha. Probar que f es un isomorfismo.

12. Si G es un grupo abeliano finito cuyo orden es potencia de un primo p, diremos que G es un p-grupo. Probar que éste es el caso, si y solo si el orden de todo elemento de G es una potencia de p.

13. Probar que todo grupo abeliano finito G es suma directa interna de p-grupos, donde p corre sobre un número finito de primos.

14. Consideremos el grupo abeliano libre $F(x_1, \ldots, x_n)$, con $n = 2k$ y sea H el subgrupo generado por $a_j = x_j - x_{j+1}$ para $j = 1, \ldots, k$. Probar que $F(x_1, \ldots, x_n)/H \cong F(x_1, \ldots, x_k)$. ¿Se puede generalizar este ejemplo?

Sucesiones exactas

15. Probar que si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es exacta y A y C son abelianos libres, entonces B es abeliano libre y $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} C$.

16. Probar que toda sucesión exacta de la forma $0 \to \mathbb{Z}_m \to C \to \mathbb{Z}_n \to 0$ tal que m y n son primos relativos, se escinde.

17. Para todo $n \geq 2$, construir una sucesión exacta $0 \to \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2} \to \mathbb{Z}_n \to 0$. Probar que toda sucesión exacta de esta forma nunca se escinde.

18. Probar que si $G_1, G_2 \subset G$ son subrgrupos y $G_1 + G_2 \subset G$ es la suma de G_1 y G_2 como en 8.1.3 (b), entonces existe una sucesión exacta $0 \to G_1 \cap G_2 \to G_1 \oplus G_2 \to G_1 + G_2 \to 0$.

19. Probar que si $G_2 \subset G_1 \subset G$, entonces $0 \to G_1/G_2 \to G/G_2 \to G/G_1 \to 0$ es exacta.

Complejos de cadenas

20. Demostrar que:

    (a) Dada una sucesión exacta corta de complejos de cadenas $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ existe una sucesión exacta larga de grupos de homología:

    $$\dots \xrightarrow{g_*} H_{q+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{f_*} H_q(C) \xrightarrow{g_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

    (b) Sean $C' \subset C$ y $D' \subset D$ dos pares de complejos de cadenas y $f : C \to D$ un morfismo de complejos tal que $f(C'_q) \subset D'_q$. Entonces el sig. diagrama es conmutativo y sus reglones son sucesiones exactas:

    $$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "j_*"] & H_{q+1}(C/C') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(C') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(C) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(C/C') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \dots \\ \dots \arrow[r, "j_*"] & H_{q+1}(D/D') \arrow[r, "\partial_*"] & H_q(D') \arrow[r, "i_*"] & H_q(D) \arrow[r, "j_*"] & H_q(D/D') \arrow[r, "\partial_*"] & \dots \end{tikzcd}$$

21. Demostrar que:

    (a) La homotopía (algebraica) es una relación de equivalencia en el conjunto de morfismos de complejos de cadenas $C \to C'$ y es compatible con la composición: Si $f \simeq g : C \to C'$ y $f' \simeq g' : C' \to C''$ entonces $f' \circ f \simeq g' \circ g$.

    (b) Si $f : C \to C'$ es una equivalencia homotópica de complejos de cadenas, entonces $f_* : H_q(C) \to H_q(C')$ es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$.

22. Sea C un complejo de cadenas. Muestre que:

    (a) Si $\partial : C_q \to C_{q-1}$ es un isomorfismo, entonces $H_q(C) = 0$ y $H_{q-1}(C) = 0$.

    (b) Si $C_{q+1} = 0$ y $C_{q-1} = 0$, entonces $H_q(C) = C_q$.

    (c) Si todos los operadores frontera de C son cero, entonces $H_q(C) = C_q$ para todo q.

    (d) C es una sucesión exacta si y solo si todos los grupos de homología de C son cero.

23. Sea $f : (C, C') \to (D, D')$ un morfismo de parejas de complejos de cadenas. Si dos de los homomorfismos $f_* : H_q(C) \to H_q(D)$, $f_* : H_q(C') \to H_q(D')$ y $f_* : H_q(C/C') \to H_q(D/D')$ son isomorfismos (siempre los mismos para todo $q \in \mathbb{Z}$), entonces el tercero también es isomorfismo, para todo $q \in \mathbb{Z}$.

24. Se define la suma directa de dos complejos de cadenas $C = C' \oplus C''$ poniendo $C_q = C'_q \oplus C''_q$, con operador frontera $\partial(c', c'') = (\partial c', \partial c'')$. Muestre que C es un complejo de cadenas y que la función $(\{z'\}_{C'}, \{z''\}_{C''}) \mapsto \{(z', z'')\}_C$ define un isomorfismo $H_q(C') \oplus H_q(C'') \to H_q(C)$.

25. Sea C un complejo de cadenas con subcomplejos C' y C''.

    (a) Pruebe que la suma $C' + C''$ es un subcomplejo de C (las q-cadenas de $C' + C''$ son los elementos de la forma $c' + c''$ tales que $c' \in C'$ y $c'' \in C''$).

    (b) Pruebe que la intersección $C' \cap C''$ es un subcomplejo de C (las q-cadenas de $C' \cap C''$ son las cadenas en $C'_q \cap C''_q$).

    (c) Pruebe que $0 \to C' \cap C'' \xrightarrow{i} C' \oplus C'' \xrightarrow{p} C' + C'' \to 0$ es una sucesión exacta corta de complejos, donde $i(c) = (c, -c)$ y $p(c', c'') = c' + c''$. Describa la correspondiente sucesión exacta larga en homología, remplazando $H_q(C' \oplus C'')$ por $H_q(C') \oplus H_q(C'')$ (ejercicio 24).

    (d) Supongamos adicionalmente que la inclusión $j : C' + C'' \to C$ induce un isomorfismo $j_* : H_q(C' + C'') \to H_q(C)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Pruebe que a partir de la sucesión exacta anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta:

    $$\ldots \xrightarrow{\Delta} H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\mu} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\nu} H_q(K) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\mu} \ldots$$

    conocida como la *sucesión de Mayer-Vietoris de* $C', C'' \subset C$. Describa los homomorfismos en esta sucesión.

26. Supongamos que el complejo simpicial $K = K_1 \cup K_2$ es unión de dos subcomplejos K_1 y K_2. Pruebe que si $C = C(K)$, $C' = C(K_1)$ y $C'' = C(K_2)$, la condición en 25 (d) se satisface automáticamente y la sucesión correspondiente es la sucesión de Mayer-Vietoris de la Lista 7, ejercicio 22.