Lista 9. Grupos de Homología Singular

Grupos de homología

1. Sean $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio que contiene a la envoltura convexa de dichos puntos. Sea $\sigma = [x_0, \dots, x_q] : \Delta_q \to A$ el mapeo afín dado por $\sigma(e_i) = x_i$, $\forall i = 1, \dots, q$ (como en 9.1.2.). Muestre que la frontera del simplejo singular σ está dada por $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q]$.

2. La condición de que la frontera de un 0-simplejo sea cero es un tanto arbitraria. Alternativamente se puede proceder del siguiente modo: Para un espacio topológico X sea $\tilde{S}(X)$ la sucesión

$$\tilde{S}(X) \ : \ \dots \xrightarrow{\partial} S_q(X) \xrightarrow{\partial} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

donde $\varepsilon(\sum_x n_x\, x) = \sum_x n_x$. Probar que $\tilde{S}(X)$ es un complejo de cadenas, conocido como el *complejo de cadenas singulares* ***aumentado*** *de* X. Sus grupos de homología ($q \geq 0$) se denotan $\tilde{H}_q(X) := H_q(\tilde{S}(X))$ y se conocen como *los grupos de homología (singular) reducida de* X. Muestre que:

(a) Si $q > 0$, entonces $\tilde{H}_q(x) = H_q(X)$.

(b) Si $X \neq \varnothing$, entonces $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

3. Procediendo como en el ejercicio anterior, defina los grupos de homología reducida de un complejo simplicial K.

4. Tabajar con los grupos de homología reducida tiene sus ventajas; existen resultados donde no es necesario hacer excepciones en dimensión $q = 0$. Considérese los siguientes ejemplos:

(a) Probar que $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n) = 0$ para $q \geq 0$.

(b) Use el *isomorfismo suspensión* (Lista 7 ejercicio 10) para probar $\tilde{H}_q(K) \cong \tilde{H}_{q+1}(\Sigma K)$, $\forall\, q \geq 0$.

Homología relativa

5. Estudiar la S.E.L. en homología de las parejas $(X, \varnothing)$ y (X, X).

6. Estudiar la S.E.L. en homología de la terna (X, A, B) en los casos siguientes: $A = B$, $A = X$ y $B = \varnothing$.

7. Probar que $H_q(X, A) \cong \bigoplus_i H_q(X_i, X_i \cap A)$, dónde X_i son las componentes arco-conexas de X.

8. Sea A un subespacio arco-conexo de X. Pruebe que la sucesion $H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \to 0$ es exacta e interprete este hecho geométricamente.

9. Sea X arco-conexo y supongamos que $\varnothing \neq A \subset X$ tiene k componentes arco-conexas. Probar que:

(a) $H_0(X, A) = 0$.

(b) $H_0(A) \cong H_0(X) \oplus \operatorname{im}\partial_*$ y que $\operatorname{im}\partial_* \cong \mathbb{Z}^{k-1}$, donde $\partial_* : H_1(X, A) \to H_0(A)$.

(c) Construir 1-ciclos en (X, A) que cuyas imágenes formen una base para $\operatorname{im}\partial_*$.

Invariancia Homotópica

10. Pruebe que todo espacio contraíble (por ejem. un disco, una celda, S^∞, etc.) es acíclico.

11. Probar que los espacios en c/u de los incisos sigs. tienen los mismos grupos homología:

    (a) El toro sólido, la banda de Möbius, los cilindros $S^1 \times I$ y $S^1 \times \mathbb{R}$, el complemento de una recta en $\mathbb{R}^3$, el plano proyectivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ menos un punto.

    (b) Un cuerpo sólido (handlebody) V_g de género g, la superficie N_g menos un punto y $S^1_1 \vee \ldots \vee S^1_g$.

    (c) S^{n-1}, $\mathbb{R}^n \setminus 0$ y $D^n \setminus 0$.

    (d) Los grupos topólogicos $GL(n, \mathbb{R})$ y $O(n)$, respectivamente $GL(n, \mathbb{C})$ y $U(n)$.

12. Sea CX el cono sobre un espacio X. Demuestre el análogo del ejercicio 21 de la Lista 7:

    (a) Para $q > 1$, $\partial_* : H_q(CX, X) \to H_{q-1}(X)$ es un isomorfismo. Dar el isomorfismo inverso (explícitamente), usando una construcción análoga a la del cono en 9.1.15.

    (b) Si X es arco-conexo, entonces $H_1(CX, X) = 0$. ¿Qué sucede en el caso general?

El teorema de excisión

13. Sea $X = A \cup B$ un CW-complejo donde A y B son subcomplejos. Muestre que la inclusión $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismos $H_q(B, A \cap B) \to H_q(X, A)$. (Esta forma del teorema de excisión será usada con frecuencia).

14. Sea ΣX la suspensión de X. Muestre que $\Sigma X = C_+X \cup C_-X$ es la unión de dos conos sobre X y que para esta terna se tiene una sucesión de Mayer-Vietoris.

15. Concluya que $\Delta : H_{q+1}(\Sigma X) \to H_q(X)$ es un isomorfismo para $q > 0$ y construir explícitamente el isomorfismo inverso (ver ejercicio 24, Lista 7).

16. Probar que si X tiene n componentes arco-conexas, entonces $H_1(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$.

17. Usar los ejercicios anteriores para calcular homología de la esfera S^n, $\forall n$.

18. Recordemos del capítulo 1 que $S^3 = V \cup V'$ es la unión de dos toros sólidos tales que $V \cap V' = T$ es un toro de dimensión 2. Usar la sucesión de Mayer-Vietoris para probar que $H_2(T) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$.

La homología de D^n y S^n

19. Sea $\nu : S^1 \to S^1 \vee S^1$ el mapeo del ejercicio 3, Lista 5. Pruebe que el homomorfismo $\nu_* : H_1(S^1) \to H_1(S^1 \vee S^1)$ está dado por $\nu_*(\{S^1\}_+) = i_{1*}(\{S^1\}_+) + i_{2*}(\{S^1\}_+)$.

20. Sea $f = i_{j_1}^{n_1} \cdot i_{j_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot i_{j_m}^{n_m} : S^1 \to S^1_1 \vee \ldots \vee S^1_r$ el mapeo dado en 1.6.9. Muestre que

    $$f_*(\{S^1\}_+) = \sum_\nu n_\nu (i_{j_\nu})_*(\{S^1\}_+)$$

    Sugerencia: Considerar primero el caso en que los $n_\nu = 1$ y los j_ν son distintos. Utilizar el Teorema 9.5.5.

21. Sea $g : S^1 \vee \ldots \vee S^1 \to S^1$ el mapeo cuya restricción a c/u de los sumandos de la unión en un punto, es id_{S^1}. ¿Cuál es el homomorfismo inducido $g_* : H_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1) \to H_1(S^1)$?

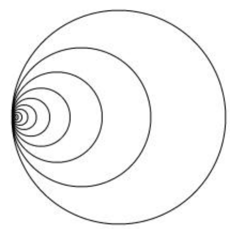
22. Sea $X \vee Y = X \times y_0 \cup x_0 \times Y \subset X \times Y$, donde X, Y son CW-complejos con $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$ 0-celdas. Demostrar la exactitud de la siguiente sucesion:

$$0 \to H_q(X \vee Y) \xrightarrow{i_*} H_q(X \times Y) \xrightarrow{j_*} H_q(X \times Y, X \vee Y) \to 0.$$

Homologia celular

23. Probar que los grupos $H_q(X)$ de un CW-complejo compacto, son grupos abelianos finitamente generados.

24. Muestre que los grupos $H_q(X)$ de un espacio compacto, que no sea un CW-complejo, pueden no ser finitamente generados. Sugerencia: Considere el espacio conocido como el *arete hawaiano*, definido en la Clase 9.



25. Consideremos el CW-complejo $X_n = S^1 \cup_n e^2 = e^0 \cup e^1 \cup e^2$, que se obtiene de S^1 pegando una 2-celda por el mapeo $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$. Muestre que las celdas de X_n se pueden orientar de modo que en el complejo de cadenas celulares de X_n se cumple $\partial e^2 = n e^1$ y $\partial e^1 = 0$. Conlcuya que $H_1(X_n) \cong \mathbb{Z}_n$ y $H_2(X_n) = 0$.

26. Pruebe que para el espacio lente $L(p, q)$ se tiene $H_1 \cong \mathbb{Z}_p$, $H_2 = 0$ y $H_3 \cong \mathbb{Z}$ (Sugerencia: Usar el ejercicio anterior).

27. Para $m, n \geq 1$, considere la sucesión exacta obtenida en el ejercicio 22

$$0 \to H_q(S^m \vee S^n) \xrightarrow{i_*} H_q(S^m \times S^n) \xrightarrow{j_*} H_q(S^m \times S^n,\, S^m \vee S^n) \to 0$$

y conlcuya que:

(a) Para $q < m + n$, i_* es un isomorfismo.

(b) Para $q = m + n$, j_* es un isomorfismo.

Use esta información para calcular los grupos de homología de $S^m \times S^n$.

28. Decida si los espacios $S^m \times S^n$ y S^{m+n} son homeomorfos ó no.

29. Pruebe que si $m \leq n$, $p \leq q$ y $S^m \times S^q \approx S^p \times S^q$, entonces $m = n$ y $p = q$.

30. Sean $i, j : S^1 \to S^1 \times S^1$ las inclusiones dadas por $z \mapsto (z, 1)$ y $z \mapsto (1, z)$, y sean $\alpha = i_*(\{S^1\}_+)$, $\beta = j_*(\{S^1\}_+)$. Pruebe que:

(a) $H_1(S^1 \times S^1)$ es abeliano libre con base α, β.

(b) Si $f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ es el mapeo $f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$, entonces $f_*(\alpha) = a\alpha + c\beta$ y $f_*(\beta) = b\alpha + d\beta$.

31. Consideremos el CW-complejo $Y = S^1_1 \vee S^1_2 \vee \dots$ con una 0-celda e^0 y 1-celdas e^1_1, $e^1_2, \dots$ Muestre que:

   (a) Se pueden pegar 2-celdas e^2_1, $e^2_2, \dots$ a Y de manera tal que en el complejo de cadenas celulares se cumple $\partial e^2_i = e^1_{i+1} - 2e^1_i \quad (i = 1, 2, \dots)$.

   (b) Calcule los grupos de homología del espacio X obtenido.

Comparación entre la homología simplicial y singular

32. Si K y L son complejos simpliciales, probar que $|K| \approx |L|$ implica que $H_q(K) = H_q(L)$.

33. Probar que la caracteristica de Euler de un complejo simplicial, $\chi(K)$ (definida en el ejercicio 10, Lista 3), es un invariante topológico, i.e. $|K| \approx |L|$ implica $\chi(K) = \chi(L)$ (Sugerencia: ejercicio 5, Lista 7).

34. Probar que $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ y que $\chi(D^n) = 1$.

35. Probar que si K es un complejo simplicial de dim. 2, con V vértices, A aristas, C caras triangulares y $|K| \approx S^2$, entonces $V - A + C = 2$ (Teorema de Euler para poliedros).

Homología y el grado de un mapeo

36. Para $n \geq 2$, sea $f : S^n \to S^n$ un mapeo tal que $f(D^n_+) \subset D^n_+$ y $f(D^n_-) \subset D^n_-$. Probar que $\deg f$ es igual al grado de la restricción $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$.

37. Recordemos que S^2 es la compactificación unipuntual de $\mathbb{C}$; por lo tanto todo polinomio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se puede extender a un mapeo $\bar{f} : S^2 \to S^2$, que fija al polo norte de S^2. Muestre que $\deg \bar{f}$ coincide con el grado del polinomio f. (Sugerencia: Considere primero el caso $f(z) = z^n$. Proceda con el caso general usando las ideas en la demostración del *Teorema Fundamental del Algebra,* capítulo 2).

38. Sea $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ la proyección canónica. Probar que $p_* : H_n(S^n) \to H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ es el homomorfismo trivial para n par y es multiplicación por 2 si n es impar.