# Productos

**Curso de Topología Algebraica**
Miguel A. Xicoténcatl

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Enero 2021

# Producto Tensorial

Definición: $V$ esp. vect. c/base $(e_1, \ldots, e_m)$ y $W$ esp. vect. c/base $(f_1, \ldots, f_n)$.

$$V \otimes W = \mathcal{L}\left(e_i \otimes f_j \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}\right)$$
$$= \text{espacio vectorial de dim } mn$$

En particular, $V \otimes \mathbb{K} \cong V$.

Función bilineal: $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ dada por $\varphi(e_i, f_j) = e_i \otimes f_j$

- Si $v = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} b_j f_j$ entonces:

$$\varphi(v, w) = v \otimes w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \, (e_i \otimes f_j)$$

- $(\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w) = \alpha(v \otimes w) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

Propiedad universal: Para toda función bilineal $\phi : V \times W \to Z$ existe una única transf. lineal $\tilde{\phi} : V \otimes W \to Z$ tal que:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Z \\ V \otimes W \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\phi = \tilde{\phi} \circ \varphi$$

$$\tilde{\phi}(e_i \otimes f_j) := \phi(e_i, f_j)$$

Nota: Evitar escribir $\tilde{\phi}(v \otimes w) := \phi(v, w)$. Ejem: $e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_4 \neq v \otimes w$

## Producto tensorial gpos. abelianos libres

Definición: Si $F_1 = \bigoplus_i \mathbb{Z}$ con base $\{e_i\}$

$F_2 = \bigoplus_j \mathbb{Z}$ con base $\{f_j\}$

$$F_1 \otimes F_2 := \text{grupo abeliano libre con base } \{e_i \otimes f_j\}$$

En particular: $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ y $F_1 \otimes \mathbb{Z} \cong F_1$

## Producto tensorial de complejos de cadenas

**Definición:** Sean $X, Y$ espacios top. y $\left(S_*(X), \partial_*^X\right)$, $\left(S_*(Y), \partial_*^Y\right)$ los complejos de cadenas singulares.

$$\begin{aligned}\left[S_*(X) \otimes S_*(Y)\right]_n &= \bigoplus_{p+q=n} S_p(X) \otimes S_q(Y) \\ &= \bigoplus_{p=0}^{n} S_p(X) \otimes S_{n-p}(Y)\end{aligned}$$

**Operador frontera:** $\boxed{\partial_n(x \otimes y) = \partial_p^X x \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q^Y y}$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ S_0(X) \otimes S_2(Y) \;\oplus\; S_1(X) \otimes S_1(Y) \;\oplus\; S_2(X) \otimes S_0(Y) \\ \downarrow \\ S_0(X) \otimes S_1(Y) \;\oplus\; S_1(X) \otimes S_0(Y) \\ \downarrow \\ S_0(X) \otimes S_0(Y) \end{array}$$

## Morfismo de Alexander-Whitney:

$$A_n : S_n(X \times Y) \longrightarrow \big[S_*(X) \otimes S_*(Y)\big]_n$$

$$A_n(\sigma, \tau) = \sum_{p=0}^{n} (\sigma \circ \lambda_p) \otimes (\tau \circ \rho_{n-p})$$

$\forall \;\; \sigma : \Delta^n \to X, \quad \tau : \Delta^n \to Y \quad$ $n$-simplejos singulares.

- $A_*$ es funtorial con respecto a $(X, Y)$.
- $A_*$ es un morfismo de complejos: $\quad \partial_n \circ A_n = A_{n-1} \circ \partial_n$.

Teorema (Eilenberg-Zilber): $\quad A_* : S_*(X \times Y) \xrightarrow{\simeq} S_*(X) \otimes S_*(Y) \quad$ es una equivalencia homotópica de complejos de cadenas.

Por lo tanto:

$$\bar{A}_n : H_n(X \times Y) \xrightarrow{\cong} H_n\big(S_*(X) \otimes S_*(Y)\big)$$

es un isomorfismo $\forall\, n$.

Teorema (Künneth): Si $C_*$ y $C'_*$ son complejos de cadenas libres, no negativos, entonces $\forall\, n$ existe una S.E.C.

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(C_*)\otimes H_j(C'_*) \xrightarrow{\alpha} H_n(C_*\otimes C'_*) \to \bigoplus_{p+q=n-1} Tor\big(H_p(C_*), H_q(C'_*)\big) \to 0$$

donde $\alpha : [z_i] \otimes [z'_j] \longmapsto [z_i \otimes z'_j]$ , la cual se escinde, i.e.

$$H_n(C_* \otimes C'_*) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(C_*) \otimes H_j(C'_*) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} Tor\big(H_p(C_*), H_q(C'_*)\big)$$

Teorema (Fórmulas de Künneth): Si $X, Y$ son espacios topológicos

$$\boxed{H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} Tor\big(H_p(X), H_q(Y)\big)}$$

## Producto tensorial de gpos. abelianos

Definición: Si $A, B$ son gpos abelianos, el **producto tensorial** $A \otimes B$ es el gpo. abeliano con la sig. presentación:

- Generadores: $A \times B$, i.e. un generador por c/pareja $(a, b)$
- Relaciones:

$$(a + a', b) = (a, b) + (a', b)$$
$$(a, b + b') = (a, b) + (a, b')$$

Esto es, si $F =$ gpo. abeliano libre generado por $A \times B$

$R =$ subgpo. generado por las relaciones

entonces $A \otimes B := F/R$. Clases de equivalencia: $a \otimes b := [(a, b)]$

Notemos que:

- $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$
- $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$
- Todo elto. de $A \otimes B$ es de la forma $\sum_i m_i(a_i \otimes b_i)$ con $m_i \in \mathbb{Z}$.

## Propiedades básicas de $\otimes$

- $a \otimes 0 = 0 = 0 \otimes b$

$$a \otimes 0 = a \otimes (0 + 0) = a \otimes 0 + a \otimes 0$$

- Si $m \in \mathbb{Z}$, entonces $m(a \otimes b) = (ma) \otimes b = a \otimes (mb)$

- Si $A$ es de torsión, entonces $A \otimes \mathbb{Q} = 0$.

  Si $a \in A$, entonces $ma = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

  Si $q \in \mathbb{Q}$, $a \otimes q = a \otimes m(q/m) = ma \otimes (q/m) = 0$.

- $A$ y $B$ finitos con ordenes primos relativos, entonces $A \otimes B = 0$

$$a \otimes b = (pm + qn)(a \otimes b) = p(ma \otimes b) + q(a \otimes nb) = 0$$

Definicion: Sean $A$, $B$ y $C$ grupos abelianos. Una **función bilineal** $\phi : A \times B \to C$ es una función tal que

$$\phi(a + a', b) = \phi(a, b) + \phi(a', b)$$
$$\phi(a, b + b') = \phi(a, b) + \phi(a, b')$$

$\forall\, a, a' \in A$ y $b, b' \in B$.

Ejemplo: La función $\varphi : A \times B \to A \otimes B, \ (a, b) \mapsto a \otimes b$ es bilineal.

Propiedad universal: Para toda función bilineal $\phi : A \times B \to C$ existe un único homomorfismo $\tilde{\phi} : A \otimes B \to C$ tal que:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \\ A \otimes B \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\phi = \tilde{\phi} \circ \varphi$$

$$\tilde{\phi}(a \otimes b) = \phi(a, b)$$

$$\forall\, a \in A,\ b \in B$$

Nota: Evitar escribir $\tilde{\phi}(a \otimes b) := \phi(a, b)$.

## Más propiedades de $\otimes$

1. $-\otimes B$ **es exacto por la derecha:** Si $A' \to A \to A'' \to 0$ es exacta, al aplicar $-\otimes B$ se obtiene una sucesión exacta

$$A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$$

Similarmente: $A \otimes -$ es exacto por la derecha.

2. $A \otimes B \cong B \otimes A$

3. $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$

4. $\mathbb{Z}/m \otimes G \cong G/mG$

5. $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/d$ con $d = m.c.d.(m,n)$

6. $\left(\bigoplus_i A_i\right) \otimes B \cong \bigoplus_i (A_i \otimes B)$ $\quad A \otimes \left(\bigoplus_j B_j\right) \cong \bigoplus_j (A \otimes B_j)$

# El funtor Tor

Si $A$ gpo. abeliano, ponemos $A = F/R$ con $F$ abeliano libre y se tiene una S.E.C.

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$$

Aplicando $- \otimes B$ :

$$R \otimes B \xrightarrow{i \otimes 1_B} F \otimes B \xrightarrow{p \otimes 1_B} A \otimes B \longrightarrow 0$$

Definición: $Tor(A, B) = \ker(i \otimes 1_B)$

- Bases para $F$ y $R$: presentación de $A$ por generadores y rels.
- $Tor(A, B)$ **no** depende de la presentación de $A = F/R$.
- $Tor(A, B)$ mide la falla en la exactitud de $- \otimes B$.

## Propiedades de Tor

1. Si $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ es una S.E.C., se tiene una suc. exacta

$$0 \to Tor(A', B) \to Tor(A, B) \to Tor(A'', B) \to A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$$

2. Si $A$ es libre de torsión, entonces $Tor(A, B) = 0$ para todo $B$.
3. $Tor(\bigoplus_i A_i, B) \cong \bigoplus_i Tor(A_i, B) \qquad Tor(A, \bigoplus_j B_j) \cong \bigoplus_j Tor(A, B_j)$
4. $Tor(\mathbb{Z}/m, B) \cong B[m] = \{x \in B \mid m \cdot x = 0\}$
5. $Tor(A, B) \cong Tor(B, A)$

Fórmulas de Künneth: Si $X, Y$ son espacios topológicos, entonces $\forall\, n$:

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \;\oplus \bigoplus_{p+q=n-1} Tor\big(H_p(X), H_q(Y)\big)$$

Corolario: Si $H_q(X)$ y $H_q(Y)$ son libres de torsión en dims $< n$

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y)$$

Corolario: Si las características de Euler $\chi(X)$ y $\chi(Y)$ están definidas, entonces $\chi(X \times Y)$ también está definida y

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$$

## Ejemplos:

| $X$ | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/2$ | 0 | 0 |
| $S^3$ | $\mathbb{Z}$ | 0 | 0 | $\mathbb{Z}$ |

$$H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & n = 1 \\ 0 & n = 2 \\ \mathbb{Z} & n = 3 \\ \mathbb{Z}/2 & n = 4 \\ 0 & n \geq 5 \end{cases}$$

| $X$ | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/2$ | 0 | $\mathbb{Z}$ |
| $S^2$ | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | 0 |

$$H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \times S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & n = 3 \\ 0 & n = 4 \\ \mathbb{Z} & n = 5 \\ 0 & n \geq 6 \end{cases}$$

Por lo tanto $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^3$ y $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \times S^2$ no son $\simeq$ equivalentes.

# Homología con coeficientes

$X$ espacio topológico

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \dots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \longrightarrow 0$$

Aplicando $- \otimes G$ :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1} \otimes 1_G} S_q(X) \otimes G \xrightarrow{\partial_q \otimes 1_G} \dots \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1_G} S_0(X) \otimes G \longrightarrow 0$$

Definición: Homología de $X$ con coeficientes en $G$

$$\boxed{H_q(X;G) := H_q\Big(\, S_*(X) \otimes G) \,\Big)}$$

Teorema (Coefs. universales para $H_*$) $\forall\, n$ la sig. S.E.C. se escinde

$$0 \to H_n(X) \otimes G \to H_n(X;G) \to Tor(H_{n-1}(X), G) \to 0$$

Por tanto:

$$H_n(X;G) \;\cong\; H_n(X) \otimes G \;\oplus\; Tor(H_{n-1}(X), G)$$

# Producto cup y producto cruz

Observación: El producto cup $c \cup d$ de $c \in S^p(X)$ y $d \in S^q(X)$ es la **cocadena** dada por la composición

$$S_*(X) \xrightarrow{S_*(\Delta)} S_*(X \times X) \xrightarrow{A_*} S_*(X) \otimes S_*(X) \xrightarrow{c \otimes d} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}$$

con $\Delta : X \to X \times X$ la diagonal y $m$ el producto en $\mathbb{Z}$.

En efecto, para $\sigma$ un $n$-simplejo en $X$: $S_*(\Delta)(\sigma) = (\sigma, \sigma)$ y

$$m \cdot (c \otimes d) \cdot A_n(\sigma, \sigma) = m \cdot (c \otimes d) \left( \sum_{i+j=n} (\sigma \circ \lambda_i) \otimes (\sigma \circ \rho_j) \right)$$
$$= \langle \sigma \circ \lambda_p, \, c \rangle \cdot \langle \sigma \circ \rho_q, \, d \rangle$$

Definición: Si $X$, $Y$ espacios y $c \in S^p(X)$, $d \in S^q(Y)$, el **producto cruz** $c \times d \in S^{p+q}(X \times Y)$ es la cocadena dada por:

$$S_*(X \times Y) \xrightarrow{A_*} S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{c \otimes d} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}$$

Lema: $\delta(c \times d) = \delta c \times d + (-1)^p\, c \times \delta d$

Producto cruz en cohomología:

$$\begin{array}{ccc} H^p(X) \times H^q(Y) & \xrightarrow{\times} & H^{p+q}(X \times Y) \\ ([c], [d]) & \longmapsto & [c \times d] \end{array}$$

Relación con el producto cup:

Si $c, d \in H^*(X)$ entonces $c \cup d = \Delta^*(c \times d)$

$$\Delta : X \to X \times X \qquad \begin{array}{ccc} H^*(X) & \xleftarrow{H^*(\Delta)} & H^*(X \times X) \\ c \cup d & \longleftarrow & c \times d \end{array}$$

Nota: Similarmente, existe un producto cruz en homología

$$H_p(X) \times H_q(Y) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(X \times Y)$$

# Producto Slant

Existe otra operación en $X \times Y$, la **división por clases de homología**

$$\begin{array}{rcl} H^{p+q}(X \times Y) \times H_p(X) & \longrightarrow & H^q(Y) \\ (\,\gamma\,,\,\alpha\,) & \longmapsto & \gamma\,/\,\alpha \end{array}$$

tal que:

- $\langle \beta,\, \gamma/\alpha \rangle = \langle \alpha \times \beta,\, \gamma \rangle$
- Caso especial: $p = q = 0, \quad \gamma = 1$

$$1/\alpha = \langle \alpha, 1 \rangle \cdot 1 \in H^0(Y) \qquad \forall\, \alpha \in H_0(X)$$

A nivel de cadenas y cocadenas:

Si $c \in [S_*(X) \otimes S_*(Y)]^*_{p+q}$, y $w \in S_p(X)$ definimos

$$\langle z,\, c/w \rangle := \langle w \times z,\, c \rangle$$

y pasamos a homología y cohomología.

## Relación entre todos los productos:

$$\left\{(\xi \times \eta) \cup \gamma\right\} / \alpha \; = \; (-1)^{r(s-q)}\, \eta \cup \left\{\gamma / (\alpha \cap \xi)\right\}$$

$$\forall \quad \gamma \in H^p(X \times Y), \quad \xi \in H^q(X), \quad \eta \in H^r(Y), \quad \alpha \in H_s(X)$$

- Caso especial $q = s$, $\gamma = 1$

$$(\xi \times \eta)/\alpha = \langle \alpha, \xi \rangle \cdot \eta$$

- Funtorialidad: Si $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$

$$(f \times g)^*(\gamma') / \alpha \; = \; g^*(\gamma' / f_*(\alpha))$$

$$\forall \quad \alpha \in H_*(X), \quad \gamma' \in H^*(X' \times Y')$$

$$X \times Y \xrightarrow{f \times g} X' \times Y' \qquad X \xrightarrow{f} X' \qquad Y \xrightarrow{g} Y'$$

$$H^*(X \times Y) \xleftarrow{(f \times g)^*} H^*(X' \times Y') \qquad H_*(X) \xrightarrow{f_*} H_*(X') \qquad H^*(Y) \xleftarrow{g^*} H^*(Y')$$