

El espacio proyectivo

Curso de Geometría Algebraica

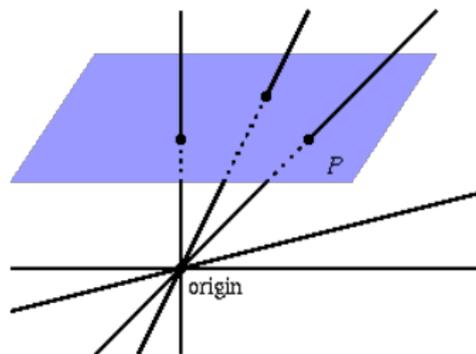
Miguel A. Xicoténcatl

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del IPN

Abril 2020

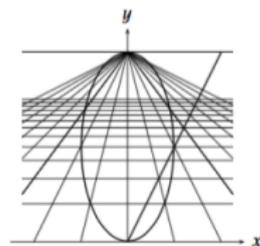
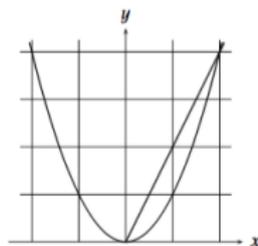
El plano proyectivo

Definición: \mathbb{RP}^2 es el conjunto de todas las rectas en \mathbb{R}^3 que pasan por 0.



Contiene al plano (euclidiano) \mathbb{R}^2

... y puntos al infinito

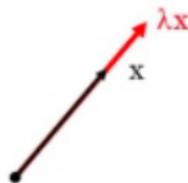


Formalmente: (Ejem. como espacio topológico)

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0) \quad / \quad (x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^\times$$

Clases de equivalencia: $[x : y : z]$ (coordenadas homogéneas)

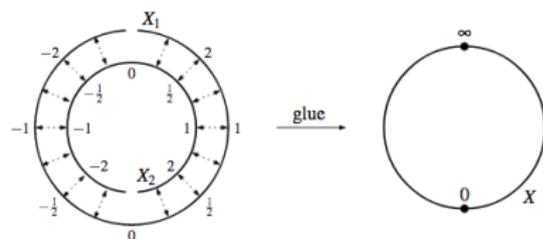
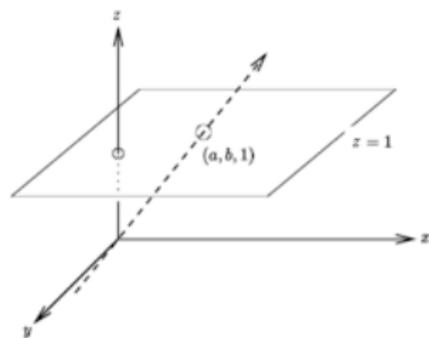
$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z], \quad \lambda \neq 0$$



El plano afín:

$$U = \{ [x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid z \neq 0 \} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^2$$

$$[x : y : z] = \left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1 \right] \longmapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right)$$



Puntos al infinito:

$$\{ [x : y : 0] \in \mathbb{RP}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0) \} \approx S^1$$

$$= W_x \cup W_y \quad \text{con} \quad W_x, W_y \approx \mathbb{R}$$

Cartas coordenadas:

$$U_x = \{ [x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid x \neq 0 \}$$

$$U_y = \{ [x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid y \neq 0 \}$$

$$U_z = \{ [x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid z \neq 0 \}$$

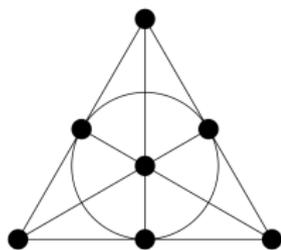
$$\Rightarrow \mathbb{RP}^2 = U_x \cup U_y \cup U_z$$

- U_x, U_y, U_z son homeomorfos a \mathbb{R}^2 .
- Cambios de coordenadas son suaves.

$\therefore \mathbb{RP}^2$ es una variedad de dim. 2 (geom. diferencial)

El plano de Fano

Definición: Es el “plano proyectivo” sobre $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

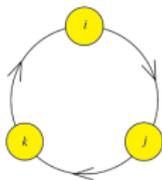


- Subespacios de dim 1 de $(\mathbb{F}_2)^3$
- 7 puntos (y 7 rectas)
- 3 rectas por cada punto
- 3 puntos en cada recta

Cuaternios:

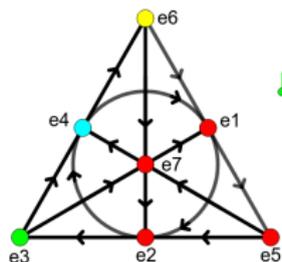
$$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \mathcal{L}(1, i, j, k)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$



Octonios: (números de Cayley)

$$\mathbb{O} = \mathbb{R}^8 = \mathcal{L}(1, e_1, \dots, e_7)$$



	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
e1	-1	e4	e7	-e2	e6	-e5	-e3
e2	-e4	-1	e5	e1	-e3	e7	-e6
e3	-e7	-e5	-1	e6	e2	-e4	e1
e4	e2	-e1	-e6	-1	e7	e3	-e5
e5	-e6	e3	-e2	-e7	-1	e1	e4
e6	e5	-e7	e4	-e3	-e1	-1	e2
e7	e3	e6	-e1	e5	-e4	-e2	-1

Espacio proyectivo de dim. n

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó un campo arbitrario

Definición: El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ es el conjunto de rectas en \mathbb{K}^{n+1} que pasan por el origen.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} - \{\vec{0}\} \quad / \quad \vec{v} \sim \lambda \vec{v} \quad \begin{array}{l} \forall \vec{v} \neq \vec{0} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}^\times \end{array}$$

Clases de equivalencia: (coordenadas homogéneas)

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] = [\lambda z_0 : \lambda z_1 : \dots : \lambda z_n] \quad \lambda \neq 0$$

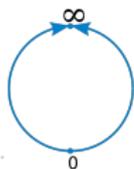
Cartas coordenadas:

$$U_i = \{ [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid z_i \neq 0 \}$$

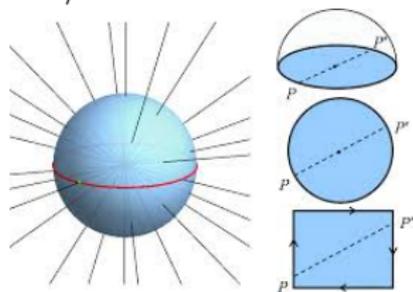
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$$

Topología: $\mathbb{R}P^n$ ó $\mathbb{C}P^n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} (respect.)

$$\mathbb{R}P^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$$

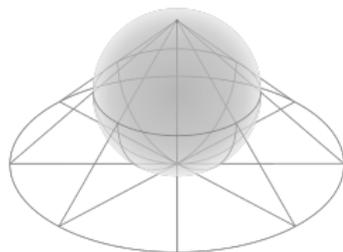


$$\mathbb{R}P^2 = S^2/x \sim \pm x$$



$$\mathbb{R}P^3 = SO(3) \quad \text{gpo. de rotaciones de } \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{C}P^1$ esfera de Riemann



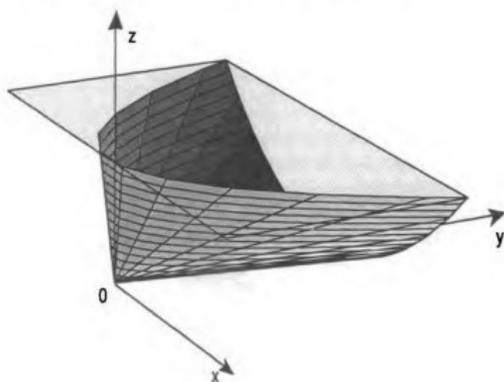
Plano proyectivo complejo:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^2 &= \mathbb{C}P^1 \cup \mathbb{A}^2 \\ &= S^2 \cup_{\eta} e^4 \end{aligned}$$

donde $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ mapeo de Hopf

$$\eta(z, w) = \begin{cases} z/w & w \neq 0 \\ \infty & w = 0 \end{cases}$$

Cerradura proyectiva de una cónica



$$y = x^2 \quad z = 1$$

$$\text{Puntos: } (x, x^2, 1)$$

$$\text{Rectas: } (tx, tx^2, t), \quad t \neq 0$$

$$(tx)^2 = (tx^2)t$$

$$x^2 = yz$$

$$V = \{ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid x^2 - yz = 0 \}$$

cerradura proyectiva

(Visualizar en \mathbb{R}^3 : teclear $z = x^2 / y$ en Google)

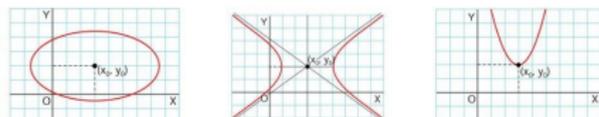
Variedades algebraicas en \mathbb{P}^n

- Se usan polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.
- $PGL_{n+1}(\mathbb{K}) = GL_{n+1}(\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times$ actúa en \mathbb{P}^n . En particular, $PGL_2(\mathbb{K})$ actúa en $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} [z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw] \quad \text{w = 1} \quad [z : 1] \mapsto \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1 \right]$$

Plano euclidiano \mathbb{R}^2

- 3 tipos de cónicas (no degeneradas)



- 72 tipos de cúbicas enumeradas por Newton

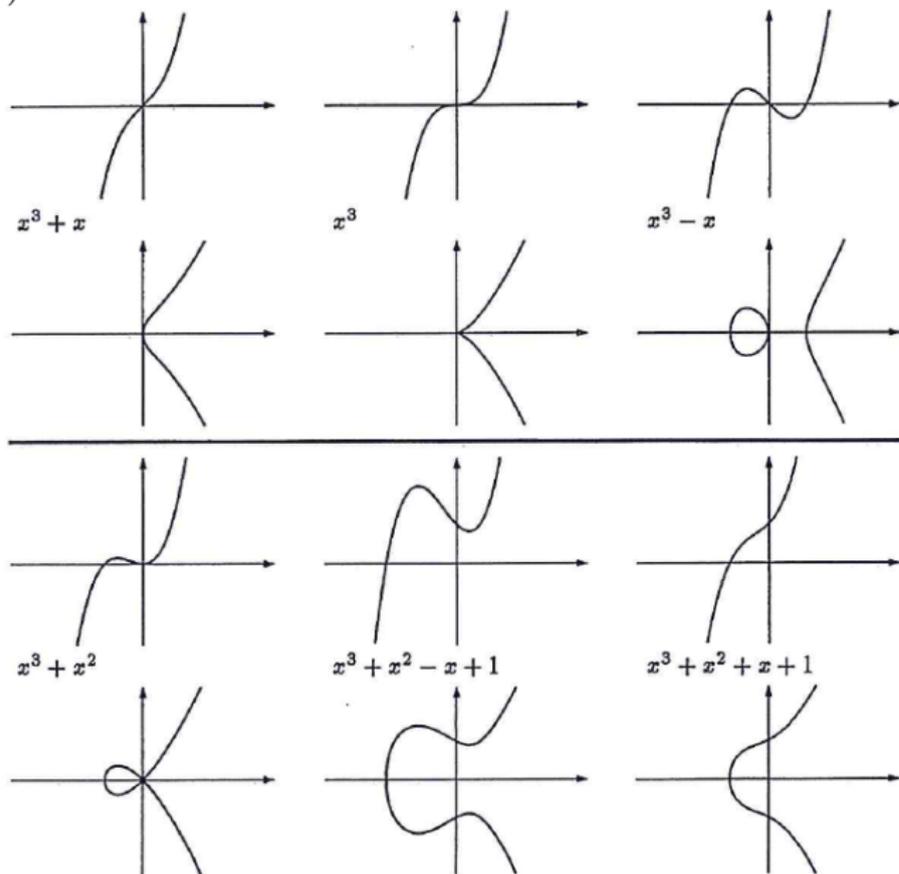
Plano proyectivo \mathbb{P}^2

- Una cónica (no degenerada)



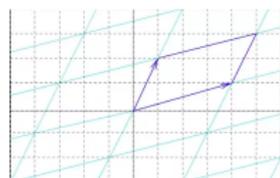
- 3 tipos de cúbicas (salvo equivalencia proyectiva)

Ejemplo: Parábolas divergentes de Newton: las curvas $y = g(x)$ y $y^2 = g(x)$

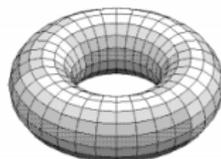


Curvas Elípticas

Definición: Una curva elíptica E es una curva cúbica suave en \mathbb{P}^2 .

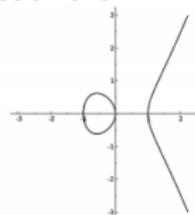


$\Lambda = \text{lattice en } \mathbb{C}$



\mathbb{C}/Λ

\cong



Teorema: Para toda E existe una **lattice** $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$, con $\text{Im}(\tau) > 0$

$$\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle \xrightarrow{\cong} E \subset \mathbb{P}^2$$

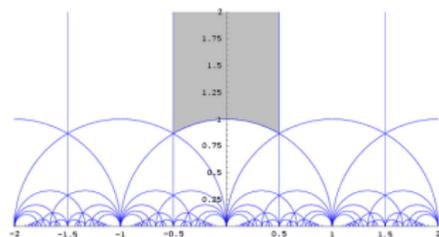
$$z \mapsto [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$$

- \wp es la función de Weierstrass

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

- $E_\tau \cong E_{\tau'} \iff \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$

alguna $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$



Espacio *moduli* de curvas elípticas

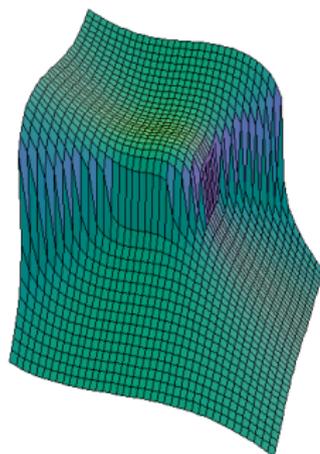
La cúbica de Fermat

Superficie en \mathbb{A}^3 dada por:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

En el espacio proyectivo \mathbb{P}^3 :

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$



Teorema: Toda superficie cúbica suave en \mathbb{P}^3 contiene 27 líneas. [\(ver video\)](#)

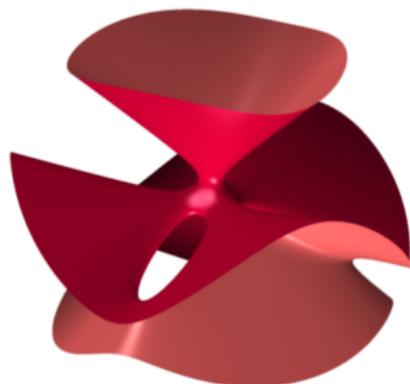
Las 27 líneas en V son:

- 9 líneas de la forma $(x_0 : ax_0 : x_2 : bx_2)$ con $a^3 = b^3 = -1$.
- 18 “conjugados” bajo permutación de coordenadas.

Superficie cúbica de Clebsch

Lugar geométrico de puntos
 $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ en \mathbb{P}^4
 que satisfacen:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \end{cases}$$



Eliminando x_0 , es isomorfa a:

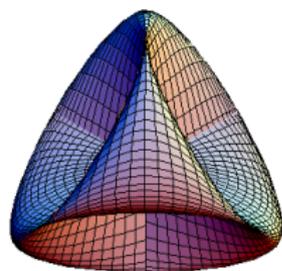
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 \quad \text{en } \mathbb{P}^3$$

- “Blow-up” de \mathbb{P}^2 en 6 puntos.
- Grupo de simetrías es el grupo simétrico S_5 (única salvo iso)
- Las 27 líneas son reales.

Variedad de Veronese

Superficie de Veronese: imagen del encaje $\nu : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$

$$\nu[x : y : z] = [x^2 : y^2 : z^2 : xy : xz : yz]$$



Mapeo de Veronese de grado d :

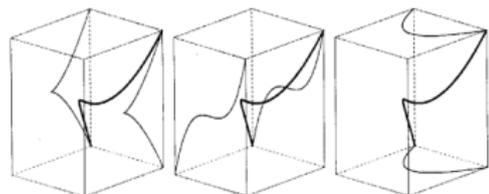
$$\nu_d : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m \quad \text{con} \quad m = \binom{n+d}{d} - 1$$

- $n = 1, d = 2$: $[x^2 : xy : y^2]$
Coord. afines: (x, x^2) , parábola.

- $n = 1, d = 3$: **cúbica labuada**

$$[x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$$

Coord. afines: (t, t^2, t^3)



$$y^3 = z^2$$

$$z = x^3$$

$$y = x^2$$

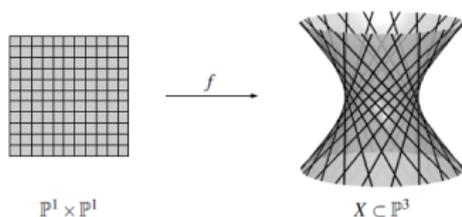
Variedad de Segre $\Sigma_{n,m}$

Encaje de Segre:

$$\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

$$([\mathbf{X}], [\mathbf{Y}]) \longmapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : \dots : x_iy_j : \dots : x_ny_m]$$

- Cuádrica en \mathbb{P}^3 :



Variedad en \mathbb{P}^3 dada por:

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = z_0z_3 - z_1z_2$$

- 3-fold de Segre $\Sigma_{1,2}$ en \mathbb{P}^5 : $\Sigma_{1,2} \cap \mathbb{P}^3 =$ **cúbica labuada**

- Restricción a $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ es el mapeo de Veronese

$$\nu_2 : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n^2+2n} \quad (\text{grado } 2)$$