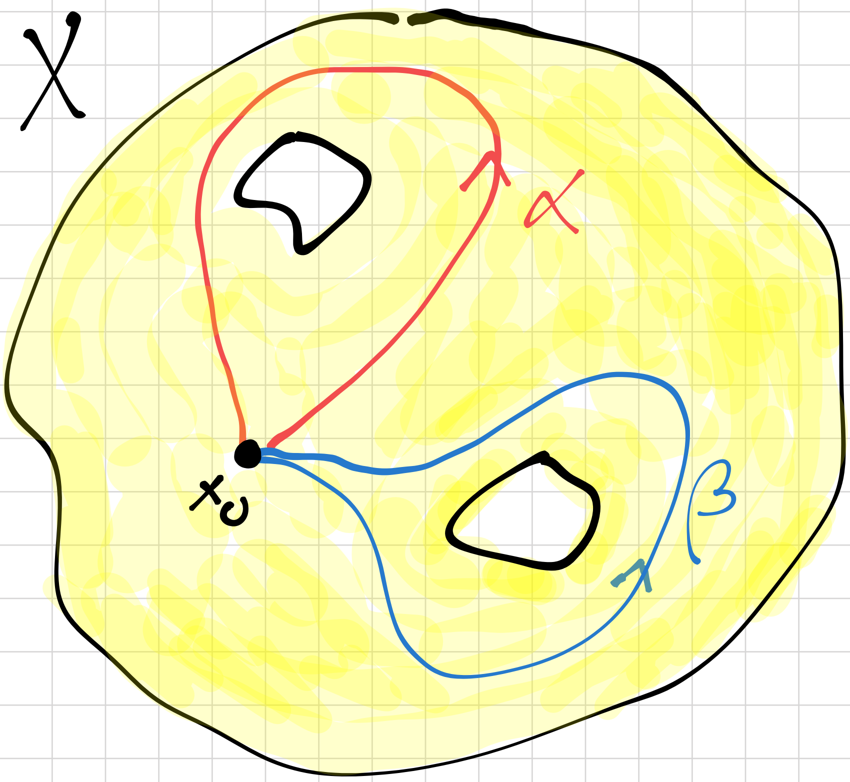
Grupo Fundamental $\pi_1(X, x_0)$



Lazo:

$\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ continua

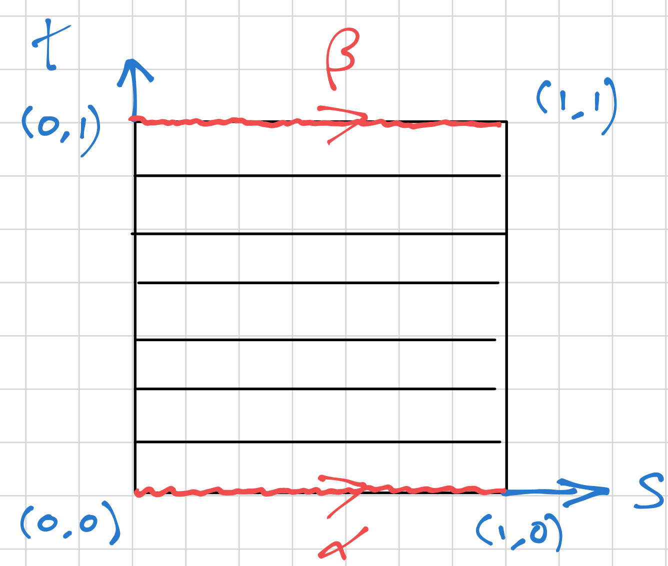
$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

Lazos homotópicos:

$\alpha \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$

si $\exists$ $F : I \times I \longrightarrow X$ continua

- $F(s,0) = \alpha(s)$
- $F(s,1) = \beta(s)$ $\quad \forall s \in I$
- $F(0,t) = x_0$
- $F(1,t) = x_0$ $\quad \forall t \in I$



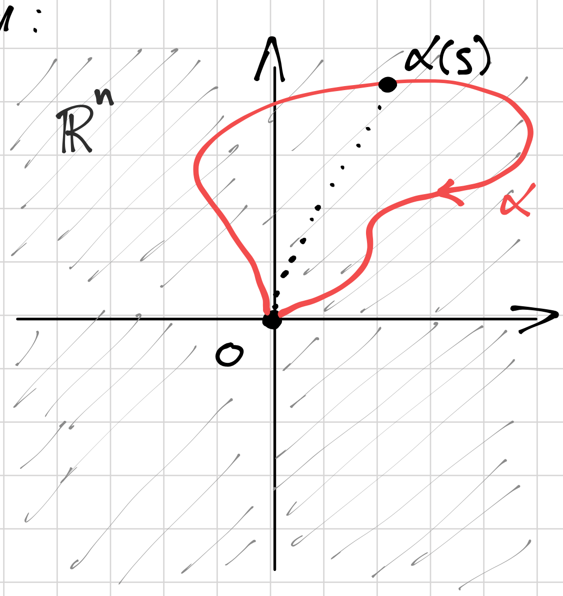
- $\simeq$ rel $\{0,1\}$ es una rel. equivalencia
- $[\alpha]$ = clase de equivalencia (clase de homotopía)
- Producto de lazos:

$$(\alpha \cdot \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

- Producto de clases: $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$

- $\pi_1(X, x_0) = \{ [\alpha] \mid \alpha : I \longrightarrow X \text{ lazo basado en } x_0 \}$ ¡Grupo!

Ejem:



En $\mathbb{R}^n$ todo lazo α es homotópico al lazo constante $x_0 = 0$.

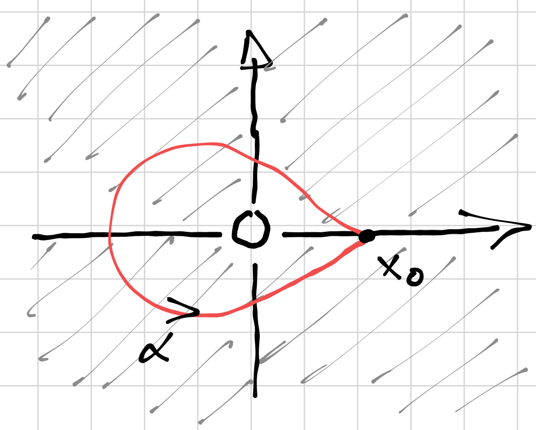
Homotopía de línea recta:

$$F(s,t) = t \cdot \alpha(s)$$

$\therefore$ $\boxed{\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \text{gpo. trivial}}$

$\mathbb{R}^n$ es 1-conexo

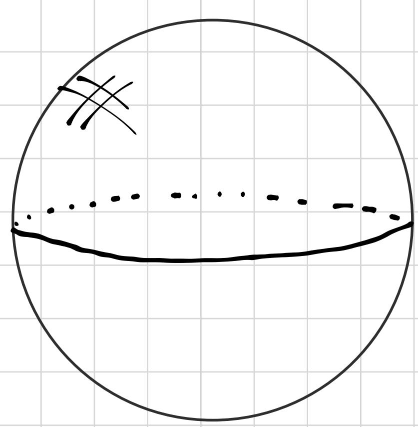
Ejem: $X = \mathbb{C} - \{0\}$



$\pi_1(\mathbb{C}^*)$ no es el gpo. trivial

De hecho: $\boxed{\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}}$

Ejem: $X = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$



S^2 es 1-conexa

$\boxed{\pi_1(S^2) = \{0\}}$

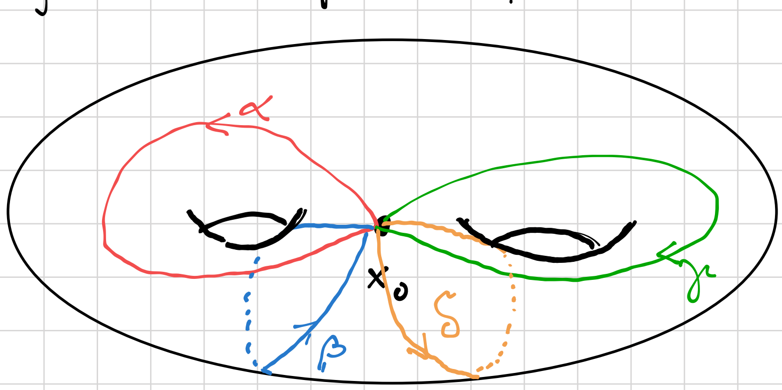
Ejem: $X =$ plano proyectivo

$$\mathbb{R}P^2 = S^2 / x \sim \pm x \quad \forall x$$

$\mathbb{R}P^2$ superficie no orientable

$\boxed{\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2}$

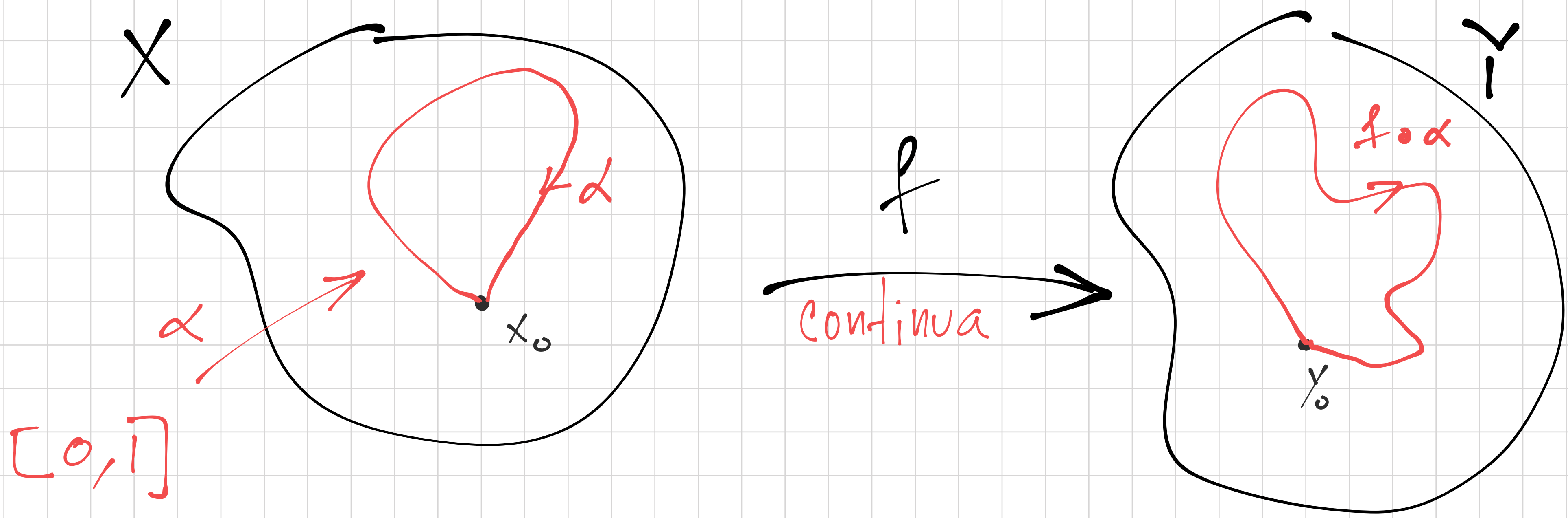
Ejem: $X =$ sup. compacta, orientable, género 2



$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid [\alpha,\beta]\cdot[\gamma,\delta] = 1 \rangle$$

$\boxed{= \text{gpo. infinito, no abeliano.}}$

Homomorfismo inducido:



$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

homomorfismo inducido

Prop:

- $f:(X,x_0) \to (Y,y_0)$ & $g:(Y,y_0) \to (Z,z_0)$

  entonces $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$ Regla de la cadena

- Si f = identidad $id:(X,x_0) \to (X,x_0)$

  entonces $(id)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$

Resumen: π_1 es un funtor de la categoría de espacios basados en la categoría de grupos.

$$\pi_1 : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}r$$
$$(X, x_0) \rightsquigarrow \pi_1(X, x_0)$$
$$f:(X,x_0) \to (Y,y_0) \rightsquigarrow f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$$

§3. Homotopía de Mapeos

Sean: X, Y espacios top.

$A \subseteq Y$ subespacio

$f, g : Y \to X$ mapeos (funciones continuas)

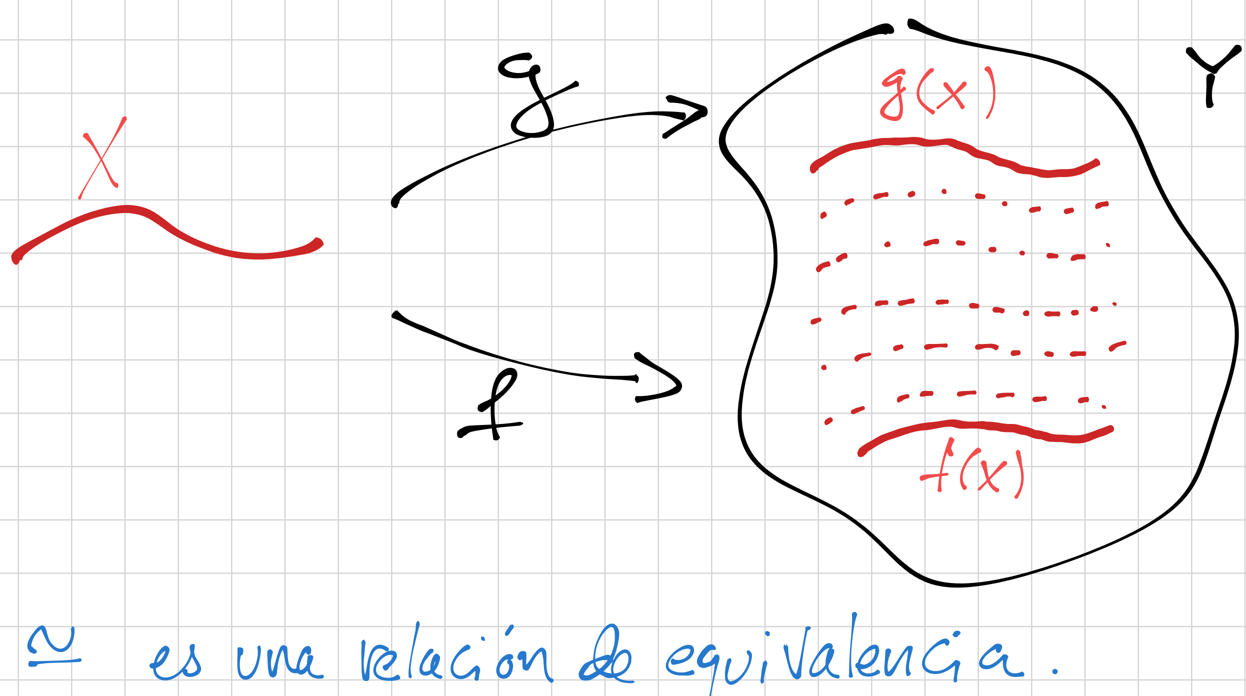
tales que: $f|_A = g|_A$.

Def: f & g son homotópicos c/r A, $f \simeq g$ rel A

si $\exists$ $F : Y \times I \to X$ continua t.q.

- $F(y,0) = f(y)$
- $F(y,1) = g(y)$ $\Big\} \forall y \in Y$
- $F(y,t) = f(y) = g(y)$ $\forall y \in A, t \in I$.

Si $A = \emptyset$, escribimos: $f \simeq g$



f se puede deformar continuamente en g

- $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Ejem: $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^n$

f = función identidad

g = función cte $\vec{0}$

$F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$

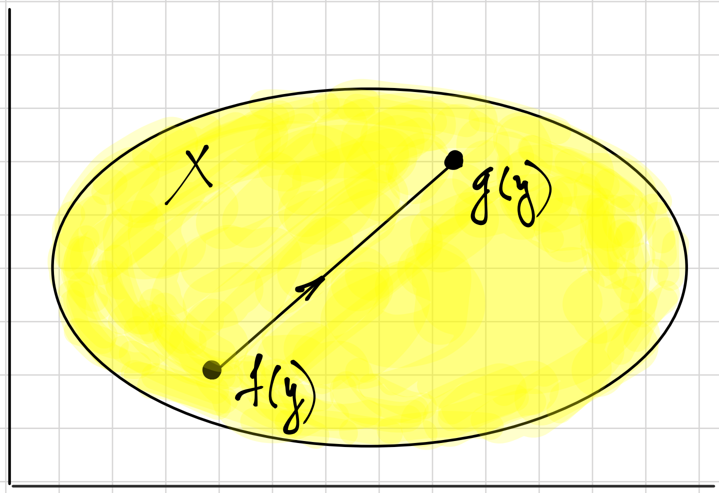
$F(x,t) = tx$

$\therefore$ $f \simeq g$.

Def: X es contraíble si $id: X \to X$ es $\simeq$ mapeo cte. x_0 (para algún x_0)

- X contraíble $\iff$ $\forall$ espacio Y, cualesquiera dos mapeos $f, g: Y \to X$ son homotópicos.
- X contraíble $\Rightarrow$ X arco-conexo.

Ejem: Todo subconjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es contraíble.



$f, g: Y \to X$ mapeos arbitrarios

$F(y,t) = (1-t)\, f(y) + t\, g(y)$

$\therefore \quad f \simeq g$

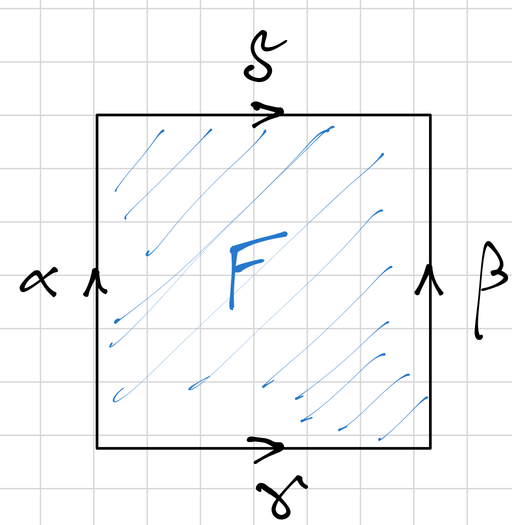
Prop: X contraíble $\Rightarrow$ X simplemente conexo (i.e $\pi_1(X, x_0) = 0$).

1-conexo

Dem: Probar que todo lazo σ (basado en x_0) es $\simeq$ lazo cte. x_0 a través de lazos basados en x_0.

Lema: Dada $F: I \times I \to X$ contínua

pongamos:
$$\alpha(t) = F(0,t)$$
$$\beta(t) = F(1,t)$$
$$\gamma(s) = F(s,0)$$
$$\delta(s) = F(s,1)$$

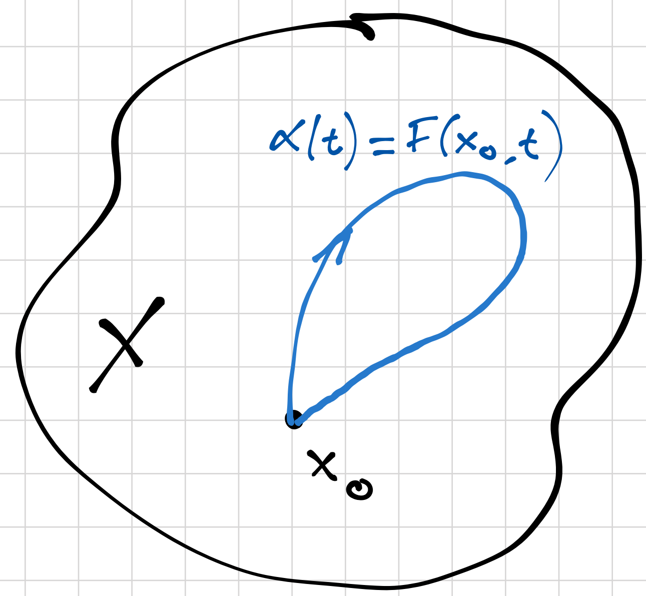


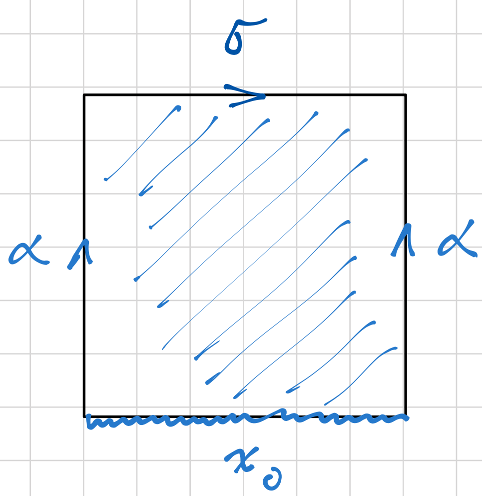
entonces: $\delta \simeq \bar{\alpha} \cdot \gamma \cdot \beta$ rel $\{0,1\}$

Dem (Prop.): X contraíble $\Rightarrow \exists\, F: X \times I \to X$ continua

$F(x,0) = x_0$
$F(x,1) = x$

$$\begin{array}{ccccc}
I \times I & \xrightarrow{\sigma \times id} & X \times I & \xrightarrow{F} & X \\
(s,0) & \longmapsto & (\sigma(s),0) & \longmapsto & x_0 \\
(s,1) & \longmapsto & (\sigma(s),1) & \longmapsto & \sigma(s)
\end{array}$$



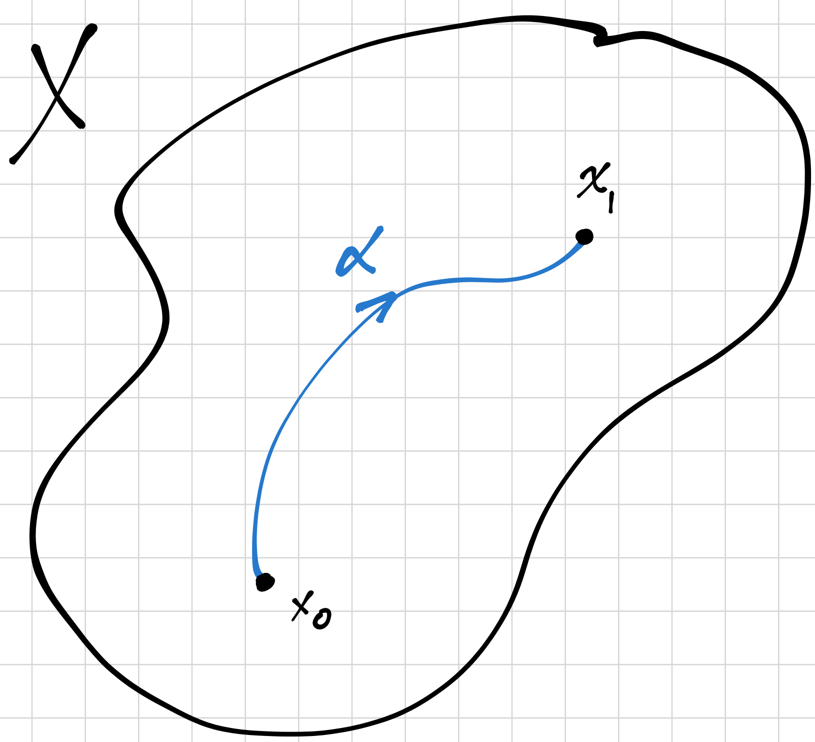


Lema $\Rightarrow$ $\sigma \simeq \bar{\alpha}\cdot x_0 \cdot \alpha$ rel $\{0,1\}$

$\simeq \bar{\alpha}\cdot\alpha$ rel $\{0,1\}$

$\simeq x_0$ rel $\{0,1\}$ $\blacksquare$

Recordemos: Si α camino en X de x_0 a x_1, entonces:



$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X,x_0) & \xrightarrow[\cong]{\alpha_*} & \pi_1(X,x_1) \\
[\alpha] & \longmapsto & [\bar{\alpha}\cdot\sigma\cdot\alpha]
\end{array}$$

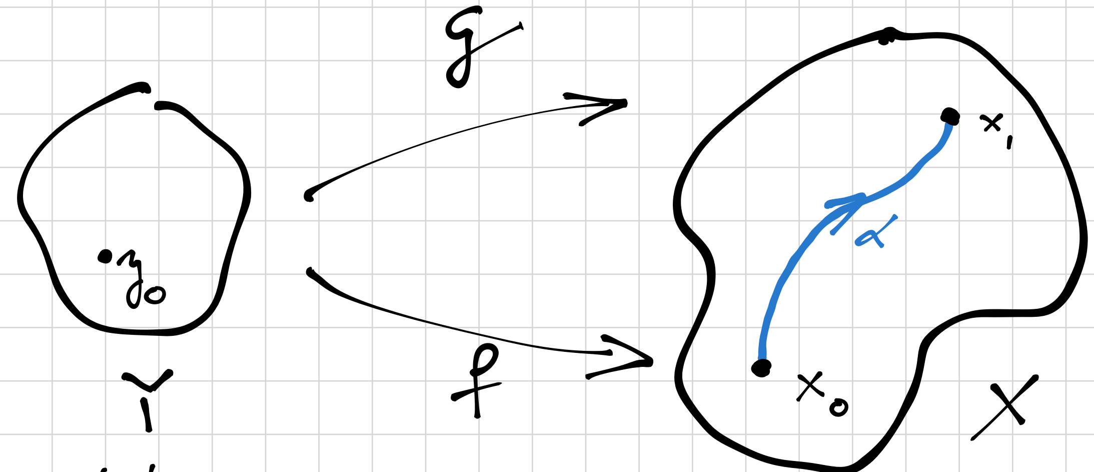
es un isomorfismo.

α_* = isomorfismo de cambio de pto. base

Cor: $f, g : Y \to X$ homotópicos, $y_0 \in Y$ & $x_0 = f(y_0)$
$x_1 = g(y_0)$

Sea $F : Y \times I \to X$ homotopía

$\alpha(t) := F(y_0, t)$



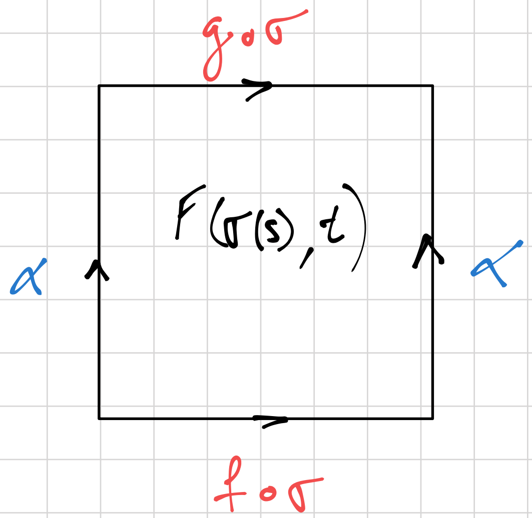
Entonces, el sig. diag. es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\alpha_*", "\cong"'] \\
 & \pi_1(X, x_1)
\end{tikzcd}$$

i.e.

$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$
(salvo isomorfismo)

Dem: Dado $\sigma : I \to Y$ lazo basado en y_0



$g \circ \sigma \simeq \bar{\alpha} \cdot f \circ \sigma \cdot \alpha \quad \text{rel } \{0,1\}$

$[g \circ \sigma] = \alpha_* \, [f \circ \sigma]$

$g_* [\sigma] = \alpha_* f_* [\sigma]$

$\blacksquare$

Def: $\underset{\text{mapeo}}{f}: Y \to X$ es equivalencia homotópica si $\exists\ \underset{\text{mapeo}}{g}: X \to Y$

t.q. $g \circ f \simeq id_Y$
$f \circ g \simeq id_X$

- X & Y son espacios homotópicamente equivalentes. $X \simeq Y$
- X es contraíble $\iff$ $X \simeq \{*\}$ (X es homotópicamente equivalente a un pto.)
- Si $f: Y \to X$ equivalencia homotópica, entonces $f_*: \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, f(x_0))$ es isomorfismo

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, bend left, "f"] & X \arrow[l, bend left, "g"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, y_0) \arrow[r, bend left, "f_*"] & \pi_1(X, f(y_0)) \arrow[l, bend left, "g_*"]
\end{tikzcd}
$$

$$g \circ f \simeq id_Y \implies g_* \circ f_* = id_{\pi_1(Y, y_0)}$$

$$f \circ g \simeq id_X \implies f_* \circ g_* = id_{\pi_1(X, f(x_0))}$$

Entonces:

$$X \simeq Y \implies \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$$

Luego:

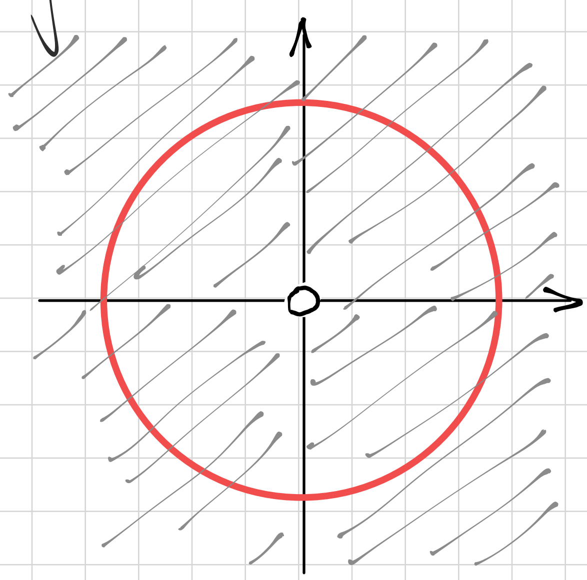
$$X \approx Y \implies X \simeq Y \implies \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$$

$$X \not\approx Y \impliedby X \not\simeq Y \impliedby \pi_1(X) \not\cong \pi_1(Y).$$

Ejem: $\mathbb{R}^n \simeq *$

$f: \mathbb{R}^n \to *$, $x \mapsto *$, $g: * \to \mathbb{R}^n$, $* \mapsto 0$

Ejem: $\mathbb{C}^* \simeq S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



$f: \mathbb{C}^* \to S^1$

$z \mapsto \frac{z}{|z|}$

$g: S^1 \to \mathbb{C}^*$ inclusión.

$z \mapsto z$

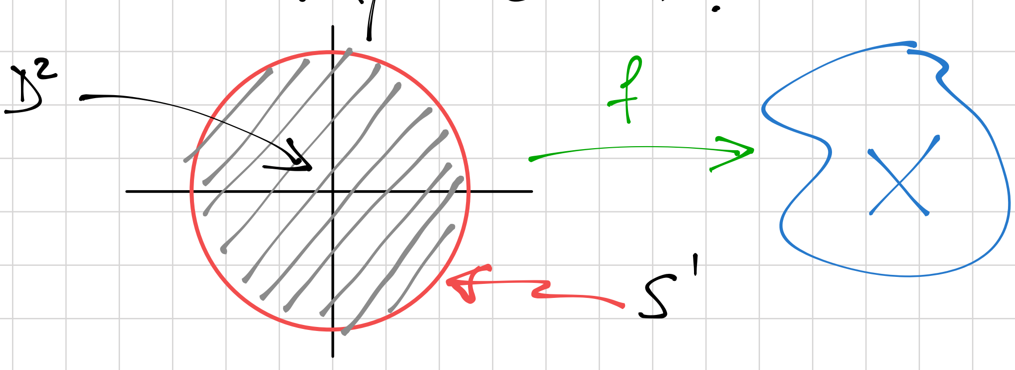
Ejem: $\mathbb{R}^n - \{0\} \simeq S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$

esfera unitaria de dim. $n-1$.

Ejercicio: X arco-conexo. Las sigs. son equivalentes:

1. X es simplemente conexo $\pi_1(X, x_0) = 0$.

2. Todo mapeo $f: S^1 \to X$ se extiende (de manera continua) a un mapeo $D^2 \to X$.



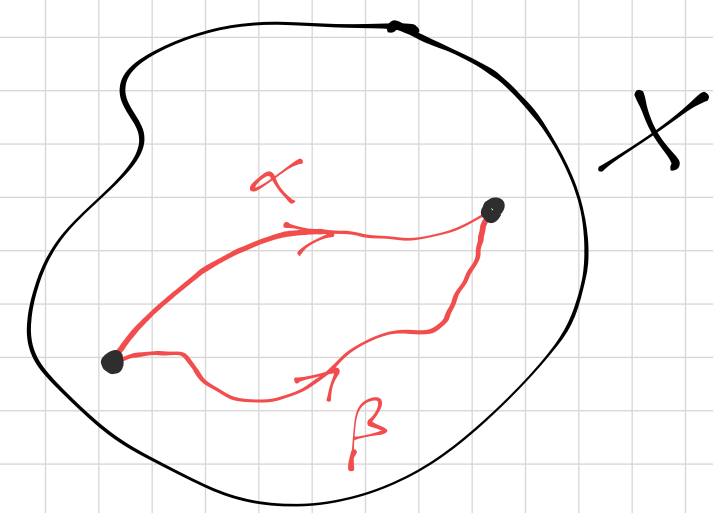
$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[dr, dashed, "\exists F"] & \\ S^1 \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

3. Dos caminos (arbitrarios) $\alpha, \beta : I \to X$ con

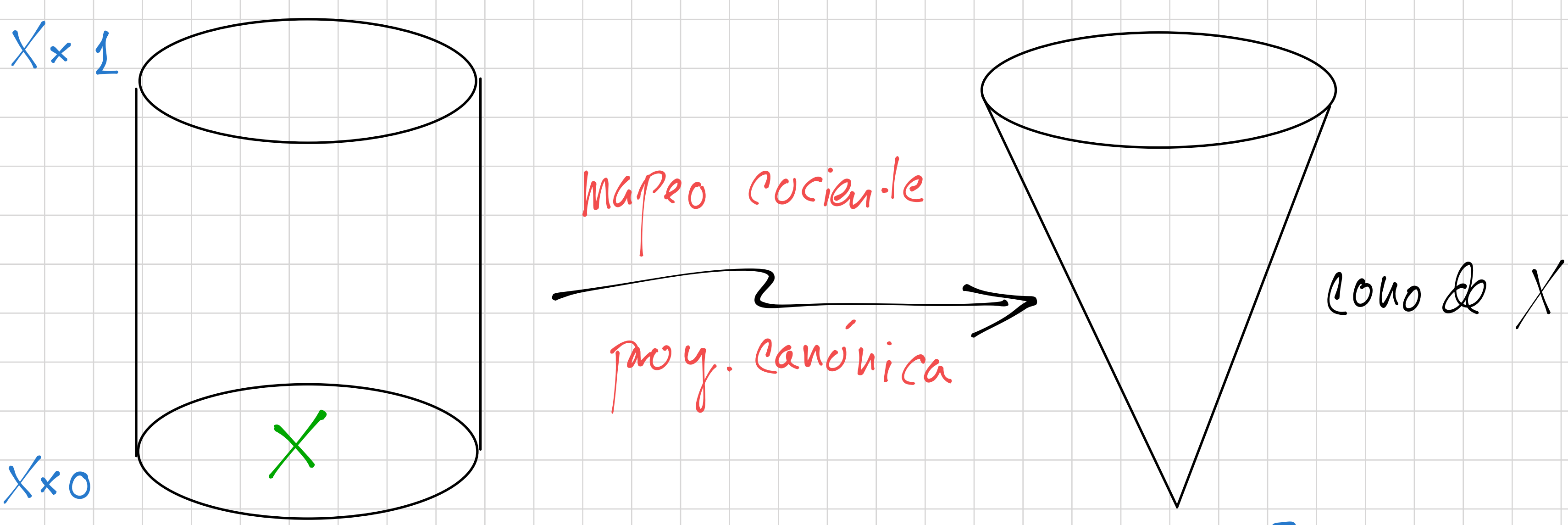
- mismo pto. inicial

& • mismo pto. final

son $\simeq$ rel $\{0,1\}$



Ejercicio: X espacio top. & CX el cono de X:



$X \times [0,1]$

cilindro de X

$$\frac{X \times [0,1]}{X \times \{0\}} = CX$$

Inclusión: $X \longrightarrow CX$

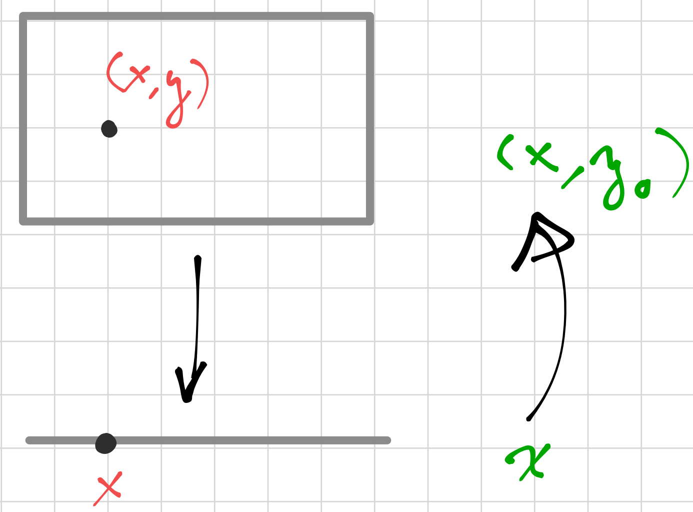
$x \longmapsto [x, 1]$

Probar que $f : X \to Y$ mapeo es homotópicamente trivial $\Longleftrightarrow$ se puede extender a un mapeo $\tilde{f} : CX \to Y$.

$$\begin{tikzcd}
CX \arrow[dr, dotted, "\exists \tilde{f}"] & \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "="] & Y
\end{tikzcd}$$

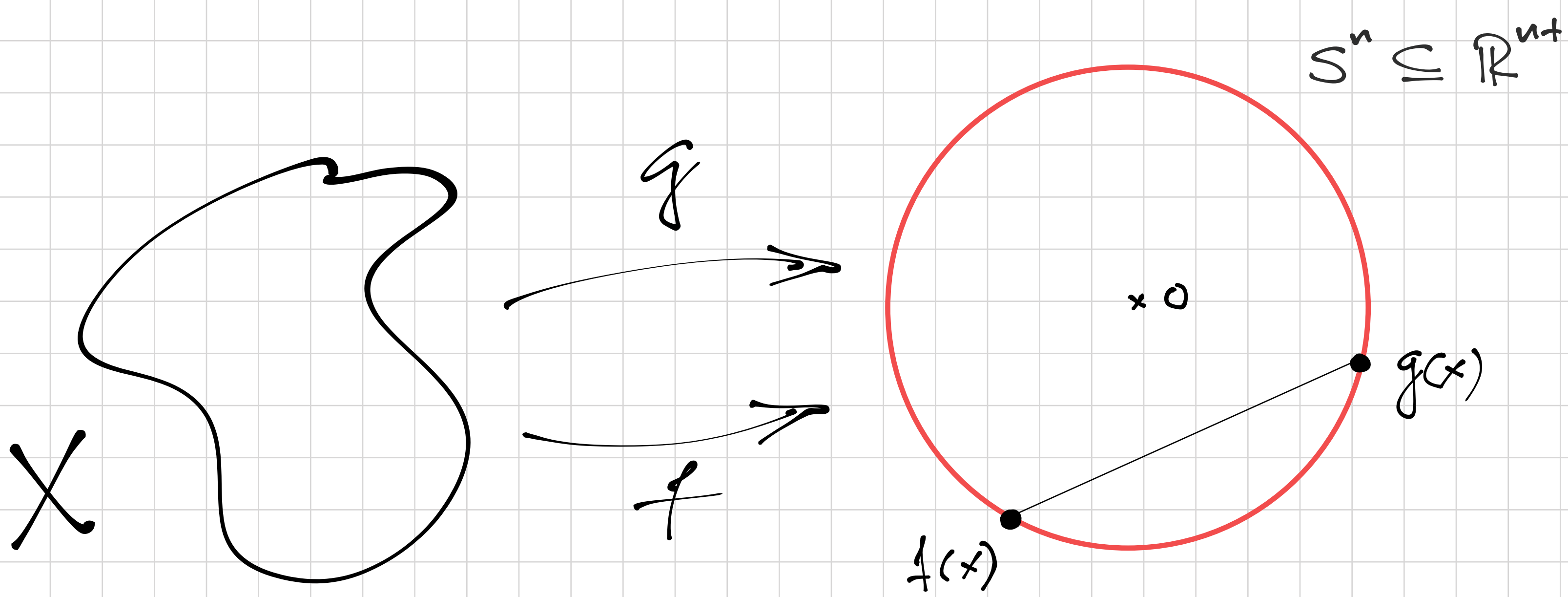
Ejercicio: Si $Y \simeq *$ (contraíble) entonces $X \times Y \simeq X$.

$$\begin{array}{c} X \times Y \\ \downarrow p \\ X \end{array}$$



Ejercicio: $f,g : X \to S^n$ mapeos tales que $f(x) \neq -g(x)$ $\forall x \in X$
($f(x)$ & $g(x)$ no son antipodales)

Entonces $f \simeq g$.



Definimos: $F : X \times I \to S^n$

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + t\,g(x)}{\|(1-t)f(x) + t\,g(x)\|}$$

$\therefore$ $f \simeq g$.