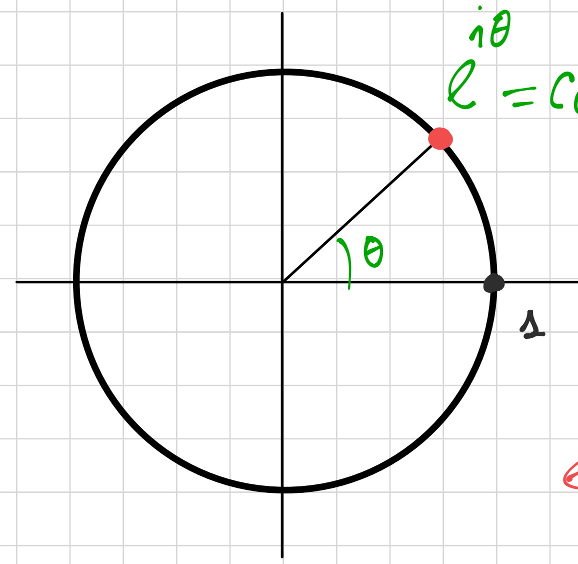
§3. El gpo. fundamental de S^1

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$= \{ e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$



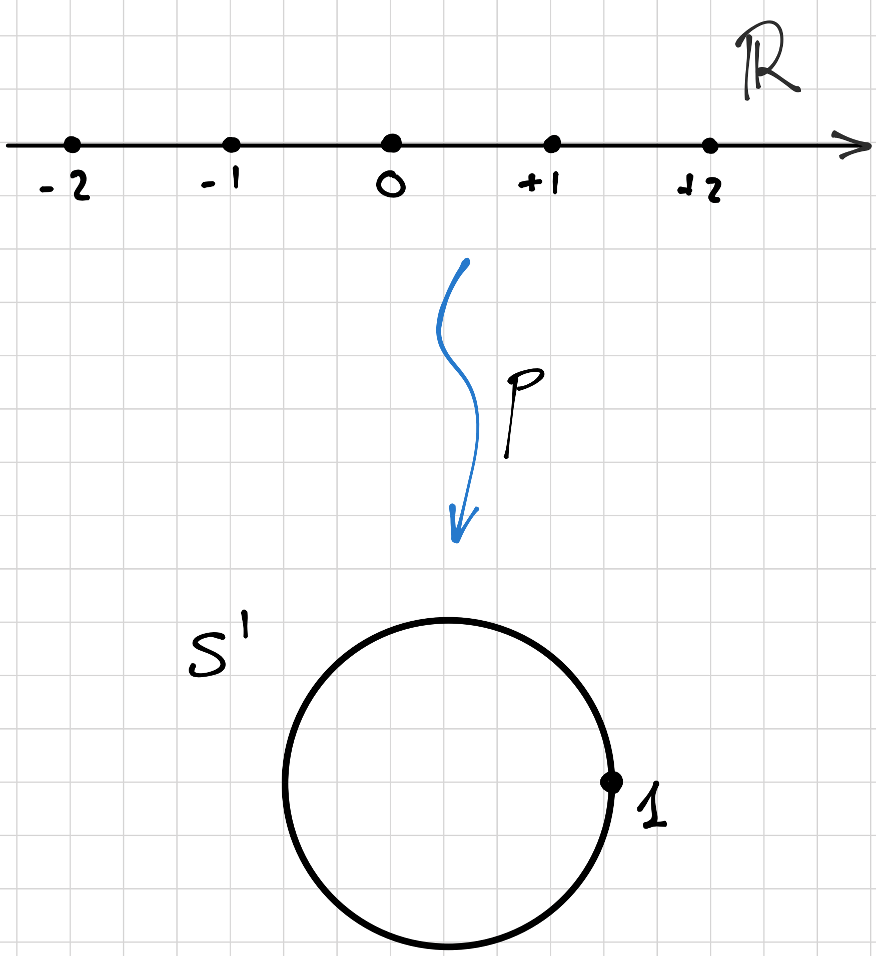
$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$e^{i(2\pi n)} = 1$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

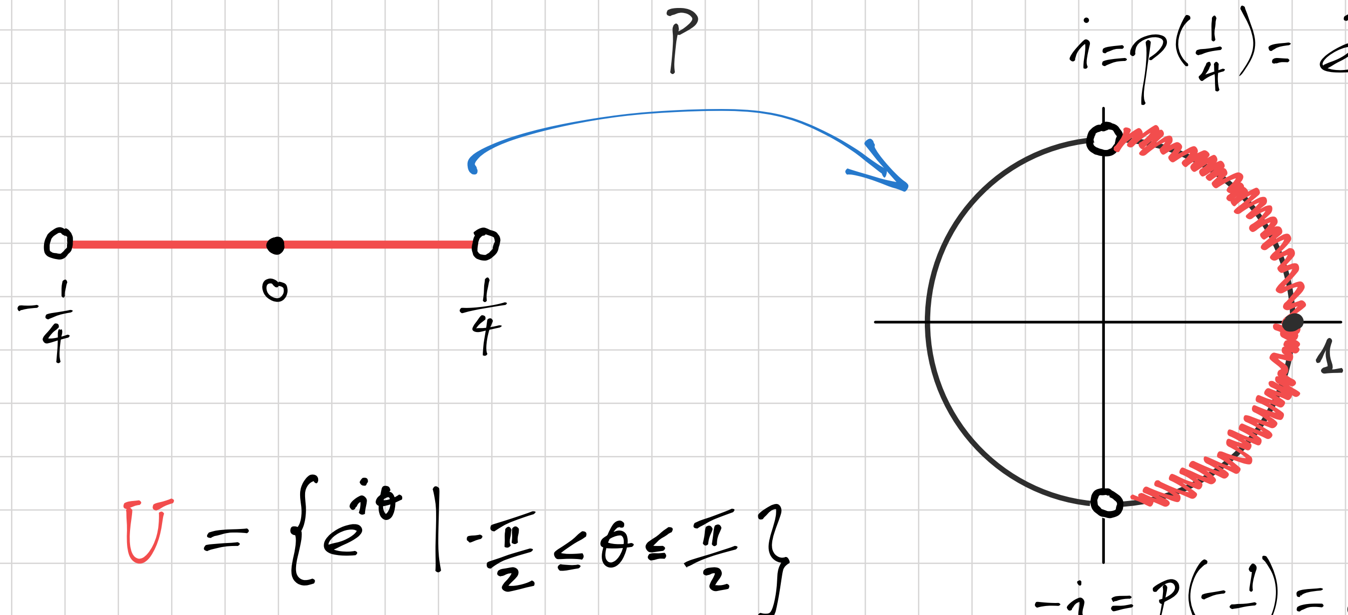
Definimos: $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$t \longmapsto e^{2\pi i t}$



- p función periódica
- p continua y sobre
- $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$
- p es homeomorfismo local.

Ejem:



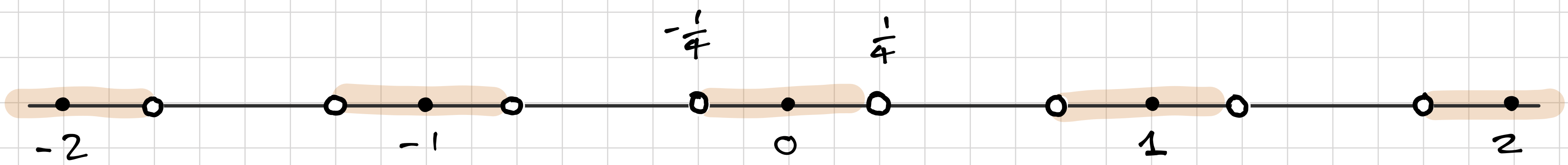
$i = p(\frac{1}{4}) = e^{\frac{\pi}{2} i}$

$-i = p(-\frac{1}{4}) = e^{-\frac{\pi}{2} i}$

$U = \{ e^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \}$

La restricción $p| : (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \xrightarrow{\approx} \bar{U}$ es homeomorfismo.

Imagen inversa de $\bar{U}$:



$$p^{-1}(U) = \coprod_{m \in \mathbb{Z}} \left(m - \frac{1}{4}, m + \frac{1}{4}\right)$$ ← unión disjunta

$p| : (m - \frac{1}{4}, m + \frac{1}{4}) \xrightarrow{\approx} \bar{U}$ homeo. $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Obs: $\forall\, z \in S^1 \ \exists\ z \in \bar{U} \subseteq S^1$ tal que:
abierto

1. $p^{-1}(U) = \coprod_j V_j$, $\quad V_j \subseteq \mathbb{R}$ abierto

2. $p|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\approx} U$ homeomorfismo $\forall j$

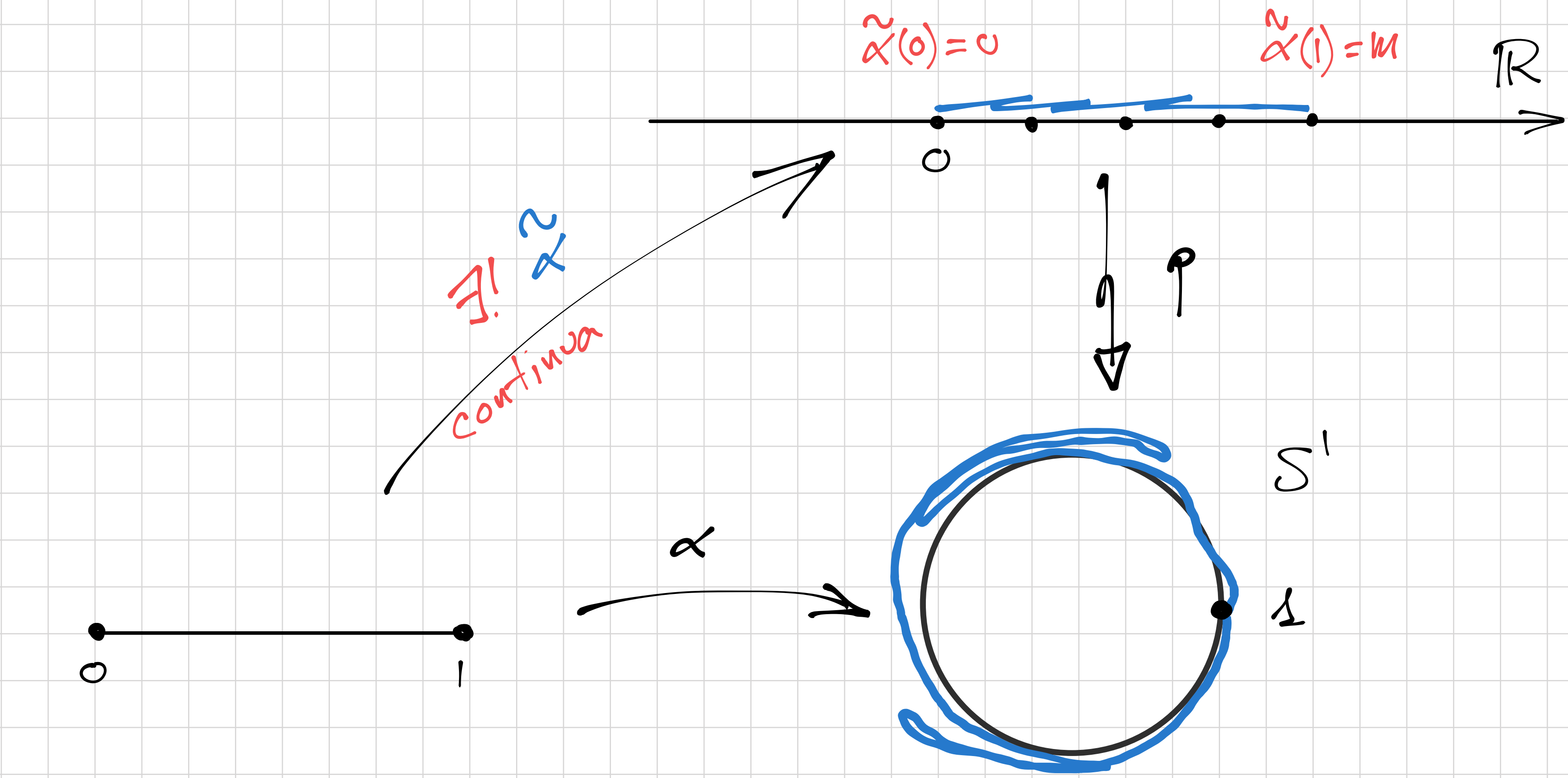
Para estudiar $\pi_1(S^1, x_0)$ usamos lazos basados

$\alpha : I \to S^1 \qquad \alpha(0) = \alpha(1) = 1.$

Lema (Levantamiento de Lazos):

Dado $\alpha : I \to S^1$ lazo basado en 1, $\exists!$ camino

$$\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R} \quad \text{tal que } \tilde{\alpha}(0) = 0 \;\; \& \;\; p \circ \tilde{\alpha} = \alpha .$$



Idea:
"Desenrollar α"

Pto. final $\tilde{\alpha}(1) = m \in \mathbb{Z}$
es el núm. de vueltas.

Eu un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\exists!\, \tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

- $\tilde{\alpha}(0) = 0$
- $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$

Dem: Usa el Lema del número de Lebesgue.

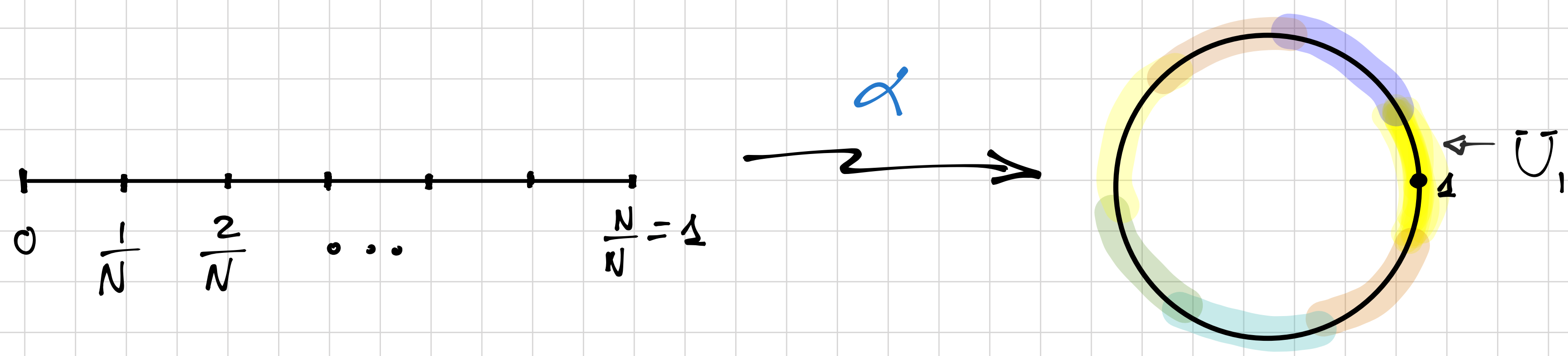
Dem: $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_\lambda$ cubierta abierta de S^1 tal que:

$$p^{-1}(U_\lambda) = \coprod_j V_j, \qquad V_j \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto}$$

$$p|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\approx} U_\lambda \qquad \text{homeomorfismo } \forall j$$

Lema núm. Lebesgue $\Longrightarrow$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right]\right) \subseteq U_\lambda \quad \text{algún } \lambda$$



Lema (Núm. de Lebesgue): X espacio métrico compacto

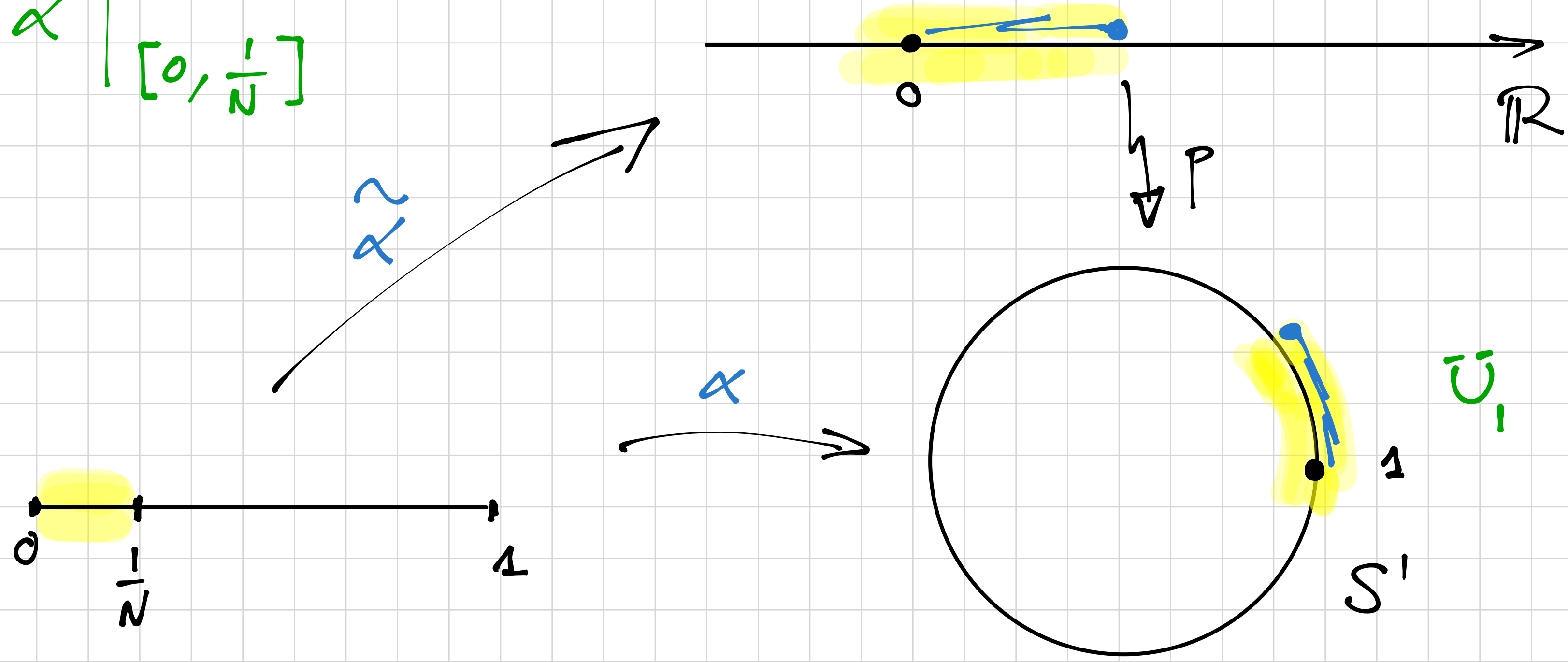
$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ cubierta abierta

Entonces $\exists$ $\varepsilon > 0$ tal que:

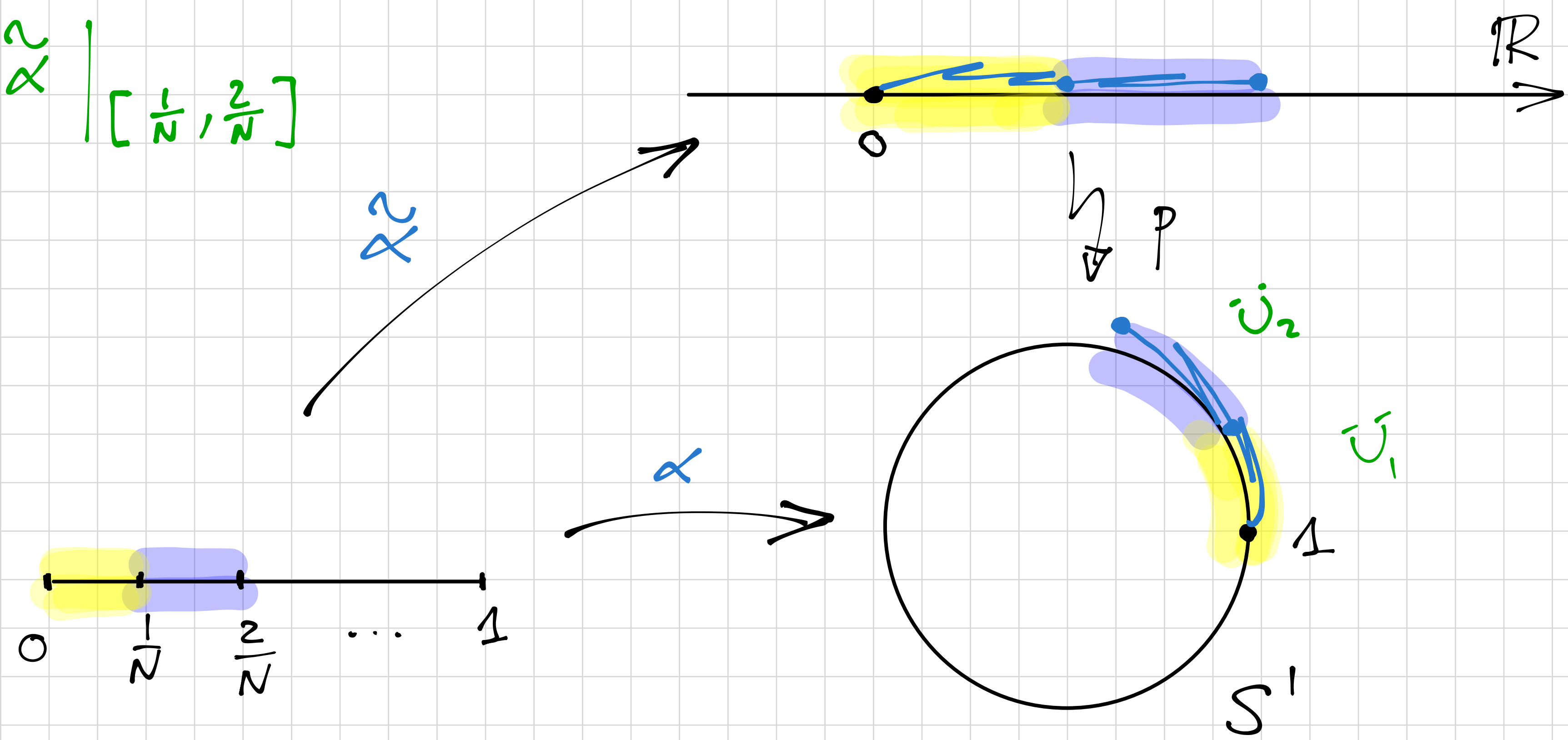
$$A \subseteq X \ \& \ \operatorname{diam}(A) < \varepsilon \Longrightarrow A \subseteq U_\lambda \text{ para algún } \lambda$$

Sea $\alpha : I \to S^1$ lazo basado en 1.

$\tilde{\alpha}\big|_{[0,\frac{1}{N}]}$



$\tilde{\alpha}\big|_{[\frac{1}{N},\frac{2}{N}]}$



y así sucesivamente. Este proceso construye $\tilde{\alpha}$.

Unicidad: Se prueba de manera similar. $\blacksquare$

Lema (Levantamiento de homotopías):

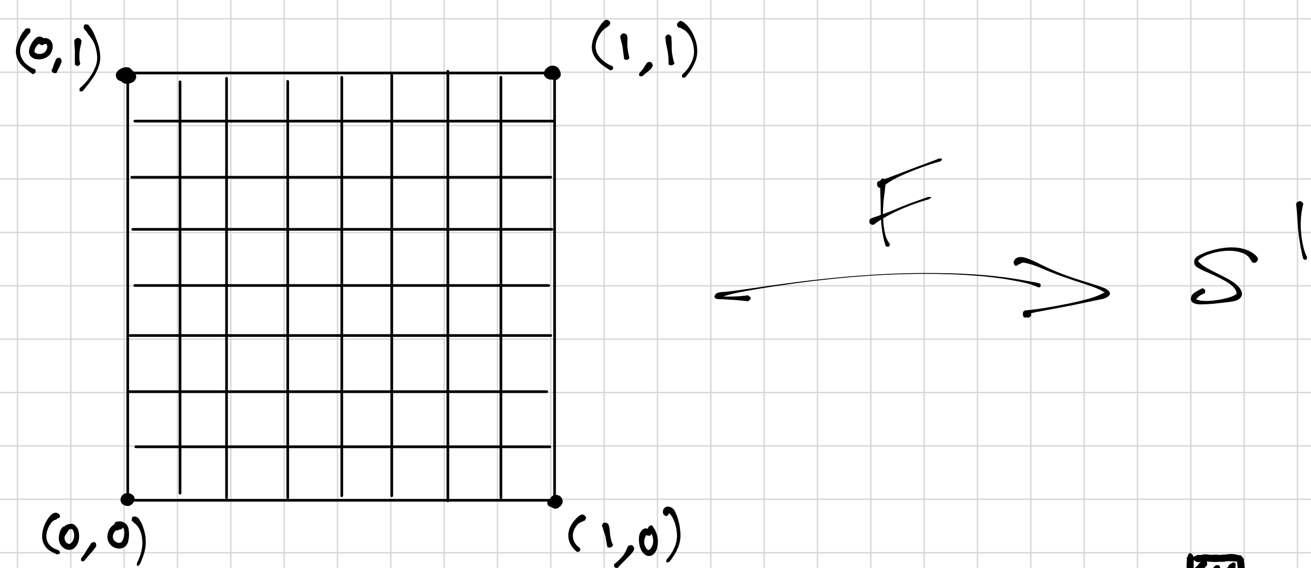
$\alpha, \beta : I \to S^1$ lazos basados en $x_0 = 1$.

Si $F : \alpha \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$ entonces

$\exists!\ \tilde{F} : \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ rel $\{0,1\}$ tal que $p \circ \tilde{F} = F$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[ur, "\exists!\ \tilde{F}"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & S^1 \end{tikzcd}$$

Dem: Aplicar Lema núm. Lebesgue a $[0,1] \times [0,1]$.



∎

Importante:

$\alpha, \beta : I \to S^1$ lazos homotópicos $\Rightarrow$ $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \to \mathbb{R}$ homotópicos c/extremos fijos

En particular: $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) \in \mathbb{Z}$

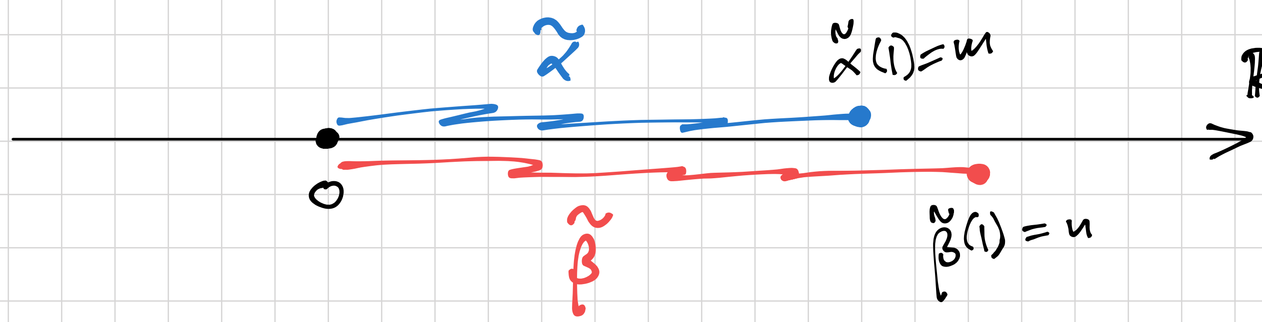
Tma: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ← gpo. con la suma

Dem:

$$h : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[\alpha] \longmapsto \tilde{\alpha}(1)$$

número de vueltas

1. h es homomorfismo: $\alpha, \beta : I \to S^1$



$\tilde{\beta}(s) + m$ = traslación de $\tilde{\beta}$ por m
empieza en m, termina en $m+n$.

Notemos:

- $\tilde{\alpha}$ & $\tilde{\beta} + m$ se pueden multiplicar.
- $p \circ \tilde{\alpha} \cdot (\tilde{\beta} + m) = \alpha \cdot \beta$
- $\tilde{\alpha} \cdot (\tilde{\beta} + m)$ levantamiento de $\alpha \cdot \beta$, empieza 0, termina $m+n$

$$\therefore \widetilde{\alpha \cdot \beta} = \tilde{\alpha} \cdot (\tilde{\beta} + m)$$ por unicidad

Entonces: $h\left([\alpha]\cdot[\beta]\right) = h\,[\alpha\cdot\beta]$

$$= \widetilde{\alpha\cdot\beta}\,(1)$$

$$= \tilde{\alpha}\cdot(\tilde{\beta}+m)\,(1)$$

$$= m+n$$

$$= \tilde{\alpha}(1)+\tilde{\beta}(1)$$

$$= h[\alpha] + h[\beta] .$$

2. h es monomorfismo

Supongamos: $h[\alpha] = \tilde{\alpha}(1) = 0$

Entonces $\tilde{\alpha}$ lazo en $\mathbb{R}$, basado en 0

$\Longrightarrow \quad \tilde{\alpha} \simeq$ lazo cte. 0

$\Longrightarrow \quad p\circ\tilde{\alpha} \simeq$ lazo cte. 1

$\Longrightarrow \quad \alpha \simeq$ lazo cte. 1

$\therefore\ [\alpha] =$ elto. neutro de $\pi_1(S^1, 1)$.

3. h es epimorfismo:

Sea $m \in \mathbb{Z}$ y pongamos $\gamma : I \to \mathbb{R}$

$s \mapsto ms$

$\gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = m$

Sea $\alpha(s) = p(\gamma(s))$

Entonces: $h[\alpha] = \tilde{\alpha}(1) = \gamma(1) = m$

$\blacksquare$

Obs: (X, x_0) & (Y, y_0) espacios c/pto. base

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

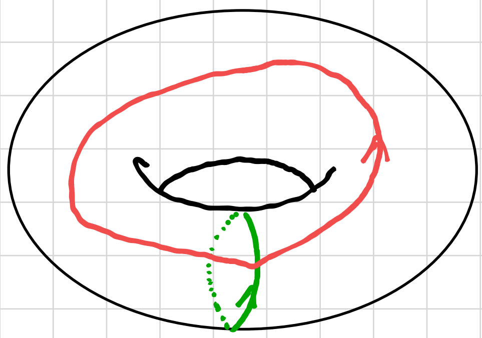
$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \arrow[dl, "p_*"'] \arrow[dr, "q_*"] & \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

proyecciones en cada factor

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$[\alpha] \longmapsto (p_*[\alpha], q_*[\alpha])$$

Cor: Gpo. Fund. del Toro



$$T = S^1 \times S^1$$

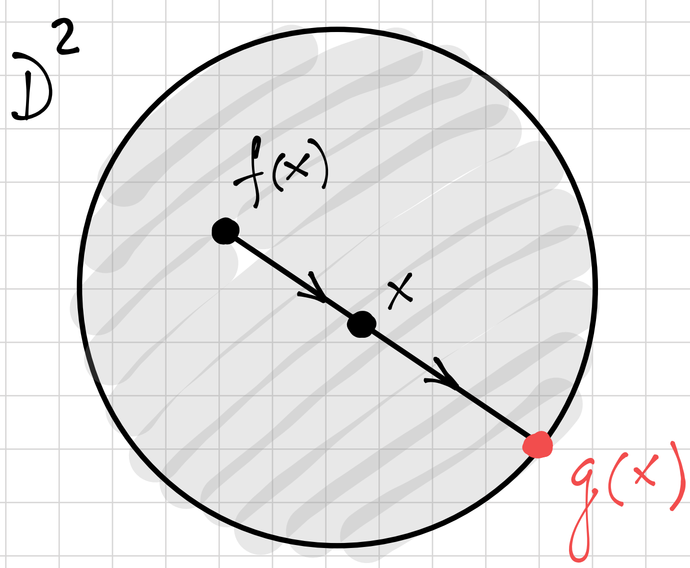
$$\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Tma (Punto Fijo, Brower):

Si $f : D^2 \to D^2$, $\exists\, x_0 \in D^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.

mapeo

Dem: Supongamos $f(x) \neq x \quad \forall x \in D^2$.



- $g : D^2 \to S^1$ continua.
- Si $x \in S^1 = \partial D^2$, entonces $g(x) = x$

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[r, "g"] & S^1 \\ S^1 \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(D^2) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(S^1) \\ \pi_1(S^1) \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "g_*"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

¡Contradicción! ∎

Tma: S^1 no es un retracto de D^2

i.e. $\nexists$ $g: D^2 \to S^1$ t.q. $g|_{S^1} = id$.

continua

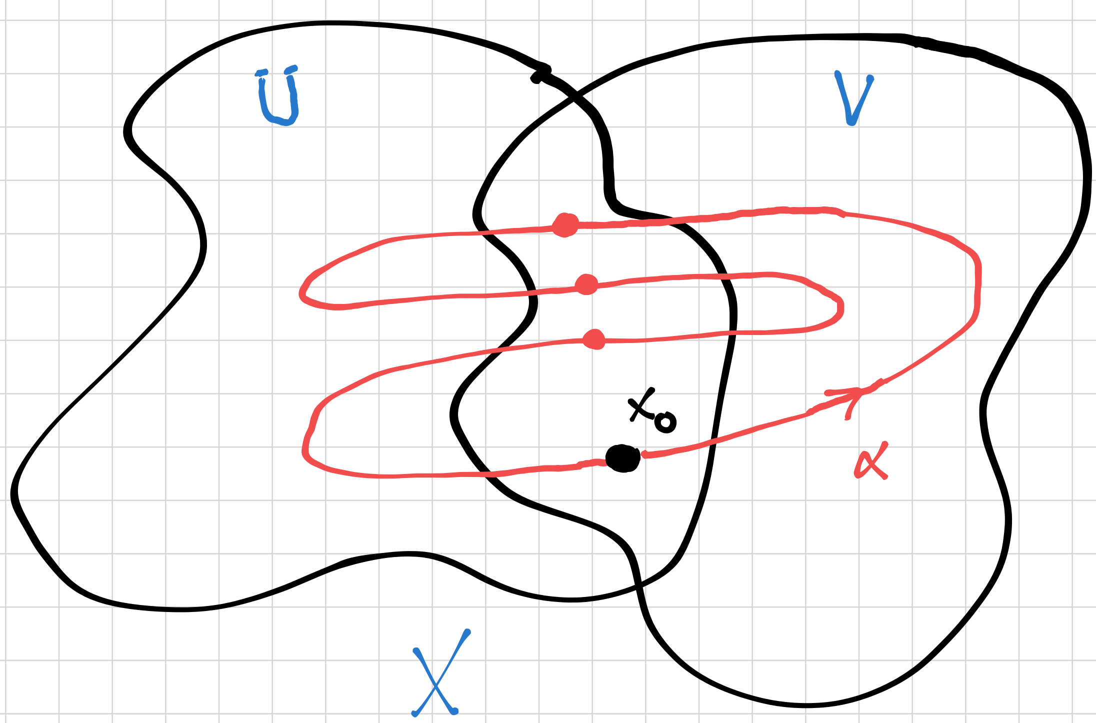
Tma (especial de Van-Kampen)

$X = U \cup V$ con

- U & V abiertos
- U, V, $U \cap V$ arco-conexos
- U, V 1-conexos

Entonces: $\pi_1(X) = 0$.

Dem:



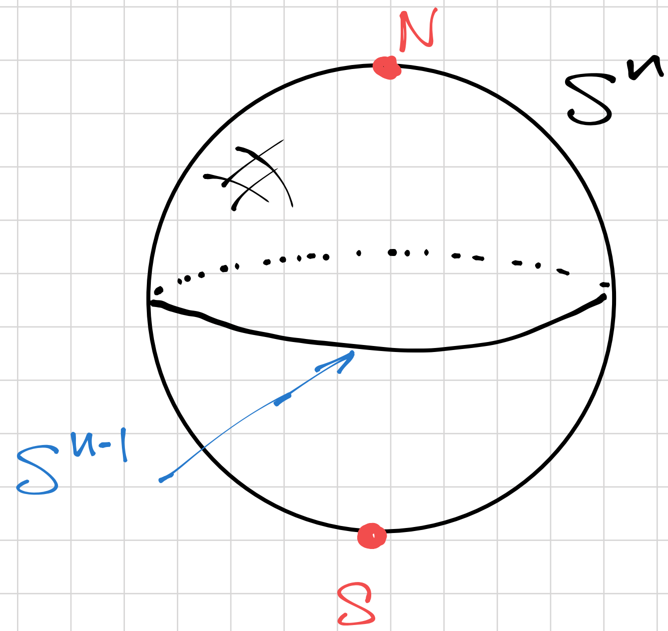
Ver Munkres.

Lema núm. Lebesgue $\Rightarrow$ α se puede expresar como producto de caminos en U ó en V, con extremos en $U \cap V$.

$\therefore$ $\alpha \simeq$ lazo cte. x_0

Ejem: Para $n \geq 2$ $\quad \pi_1(S^n) = 0$.

$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$



N $= e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$

S $= -e_{n+1} = (0, \dots, 0, -1)$

Ponemos: $U = S^n \setminus \{N\}$

$V = S^n \setminus \{S\}$

$\Rightarrow U \cap V = S^n \setminus \{N, S\} \simeq S^{n-1}$

Entonces: $U, V, U \cap V$ arco-conexos

$U = S^n \setminus N \approx \mathbb{R}^n \simeq *$

$V = S^n \setminus S \approx \mathbb{R}^n \simeq *$

Proyección estereográfica

Tma. anterior $\Rightarrow \pi_1(S^n) = 0$.

Tma (Van-Kampen):

$X = U \cup V$ con:

- U, V abiertos
- U, V, $U \cap V$ arco-conexos.

Entonces:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) \underset{\pi_1(U \cap V)}{*} \pi_1(V)$$

Producto amalgamado.

Revisar:

- Producto libre de gpos.: $G_1 * G_2$
- Producto amalgamado: $G_1 \underset{H}{*} G_2$

Situación:

$$\begin{tikzcd} & G_1 \\ H \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G_2 \end{tikzcd}$$

Grupos y homomorfismos.