4.2 Construcción de CW-Complejos

Tma:

a). Todo CW-complejo X tiene la topología débil c/r a sus esqueletos $\{X^n\}_{n\geq 0}$, es decir

$$X = \lim_n X^n$$

b) Sea (X, A) pareja de CW-complejos y $\forall$ n-celda e_j^n en $X \setminus A$, sea $f_j : S^{n-1} \to X^{n-1}$ un mapeo de pegado.

Entonces, $A \cup X^n$ se puede obtener (ó recuperar) a partir de $A \cup X^{n-1}$ pegando las n-celdas con tales mapeos.

Dem: Tma. 4.2.1.

Obs: Si $A = \emptyset$, Tma. implica que todo CW-complejo se construye del sig. modo:

- Comenzamos con X^0 (espacio discreto).
- Pegamos 1-celdas para obtener X^1
- Pegamos 2-celdas para obtener X^2, etc.

Obtenemos una suc. de espacios: $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots$

y $$X = \lim_n X^n$$

Recíprocamente:

Tma: Sea $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots$ una sucesión de espacios topológicos tales que:

- X^0 es discreto
- X^n se obtiene de X^{n-1} pegando n-celdas.

Entonces, $X = \lim_n X^n$ es un CW-complejo.

Ejems:

a). Los espacios proyectivos infinitos

- $\mathbb{R}P^\infty = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots$ $\qquad \mathbb{R}P^n = S^n / \pm 1$
- $\mathbb{C}P^\infty = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots$ $\qquad \mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / S^1$
- $\mathbb{H}P^\infty = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \dots$ $\qquad \mathbb{H}P^n = S^{4n+3} / S^3$

son CW-complejos.

b). $S^n = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-) \cup \dots \cup (e^n_+ \cup e^n_-)$

$S^{n-1} \subseteq S^n$ es un subcomplejo

y $S^\infty = \lim_n S^n$ es un CW-complejo.

Espacios de adjunción:

Dados $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$, donde (X,A) es un par de CW-complejos y Y es CW-complejo, formamos el espacio de adjunción:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y \cup_f X \end{tikzcd}$$

Pregunta: ¿Bajo qué condiciones es $Y \cup_f X$ un CW-complejo?

Contraejemplo:

Sea $f: S^1 \to S^2$ una función continua y suprayectiva (Ejercicio: Construir tal función) y peguemos una 2-celda a S^2 usando f.

Entonces: $S^2 \cup_f e^2$ se puede descomponer en celdas, pero ∂e^2 no está contenido en el 1-esqueleto.

$\therefore S^2 \cup_f e^2$ no es CW-complejo

Def: Una función continua $f: X \to Y$ entre CW-complejos es un mapeo celular si $f(X^n) \subseteq Y^n$ $\forall n \geq 0$.

Tma: Dados $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ tales que:

- (X, A) es un par de CW-complejos
- Y es un CW-complejos
- f es un mapeo celular

entonces $Y \cup_f X$ es un CW-complejo y $Y \subseteq Y \cup_f X$ es un subcomplejo.

Dem. Tma. 4.2.5

Tma: Si (X, A) pareja de CW-complejos, $A \neq \emptyset$, entonces X/A es un CW-complejo con:

- Una 0-celda $\langle A \rangle \in X/A$ y
- celdas de la forma $p(e)$, donde

$p: X \to X/A$ proy. canónica & e corre sobre las celdas $X \setminus A$.

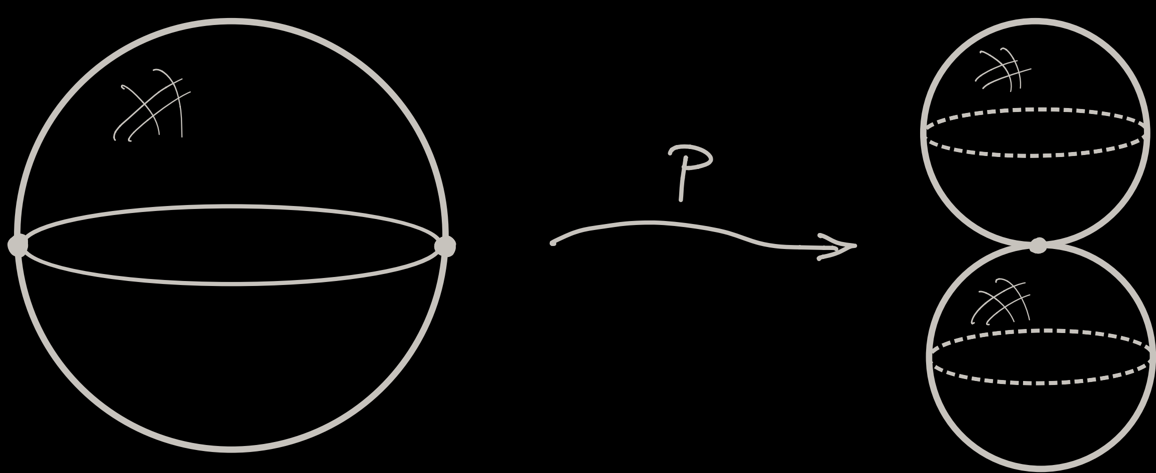
Tma: La unión en un pto. $\bigvee_\alpha X_\alpha$ de una colección arbitraria de CW-complejos X_α, es un CW-complejo.

Tma: Para todo CW-complejo X y todo $n \geq 0$,

$$X^n / X^{n-1} \approx \bigvee_\alpha S^n.$$

tantas esferas como n-celdas tenga X.

Ejem: $X = S^2$



$$X = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-) \cup (e^2_+ \cup e^2_-)$$

$$X^2 / X^1 \approx S^2 \vee S^2$$

Tma: Si X CW-complejo con celdas $e_\alpha \subseteq X$
$\quad\quad Y$ " " " " $e_\beta \subseteq Y$

entonces las celdas $e_\alpha \times e_\beta \subseteq X \times Y$ forman una estructura celular de $X \times Y$ y:

a). $(X\times Y)^n = (X^0 \times Y^n) \cup (X^1 \times Y^{n-1}) \cup \dots \cup (X^n \times Y^0)$.

b). $\overline{e_\alpha \times e_\beta} = \overline{e_\alpha} \times \overline{e_\beta}$

$$\partial(e_\alpha \times e_\beta) = (\partial e_\alpha \times \overline{e_\beta}) \cup (\overline{e_\alpha} \times \partial e_\beta)$$

c). Las celdas $e_\alpha \times e_\beta$ satisfacen (C).

d). Si $F: D^m \longrightarrow X$ mapeo característico de e_α
$\quad\quad G: D^n \longrightarrow Y$ " " " e_β

entonces:

$$D^{m+n} \underset{\approx}{\xrightarrow{h}} D^m \times D^n \xrightarrow{F\times G} X \times Y$$

es un mapeo característico para $e_\alpha \times e_\beta$.

e). Si X ó Y es loc. compacto, entonces $X \times Y$ es CW-complejo c/r las celdas $e_\alpha \times e_\beta$.

Dem: (a) – (d) fáciles.

(e) $\Longleftarrow$ Tma. 1.2.13 (Top. Cociente).

4.3 Propiedades Homotópicas de los CW-Complejos.

Tma: Toda pareja (X, A) de CW-complejos tiene la PEH.

Dem: Tma. 4.3.1.

Tma (de aproximación celular)

1. Para toda función continua $f: X \to Y$ entre CW-complejos, $\exists$ un <u>mapeo</u> <u>celular</u>
$$g \simeq f : X \to Y.$$

2. Si $A \subseteq X$ es un subcomplejo y $f|_A : A \to Y$ es un mapeo celular, entonces g se puede escoger de modo que
$$g|_A = f|_A \quad y \quad g \simeq f \text{ rel } A.$$

Def: g es una <u>aproximación</u> <u>celular</u> de f.

Tma (aprox. celular de homotopías)

Sean $f, g : X \to Y$ dos mapeos celulares entre CW-complejos tales que $f \simeq g$.

Entonces $\exists$ homotopía celular entre f y g

$$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. una homotopía } h_t : X \to Y \text{ entre} \\ f \text{ y } g \text{ tal que } \quad h_t(X^n) \subseteq Y^n \quad \forall n \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall t \in I \end{array} \right)$$