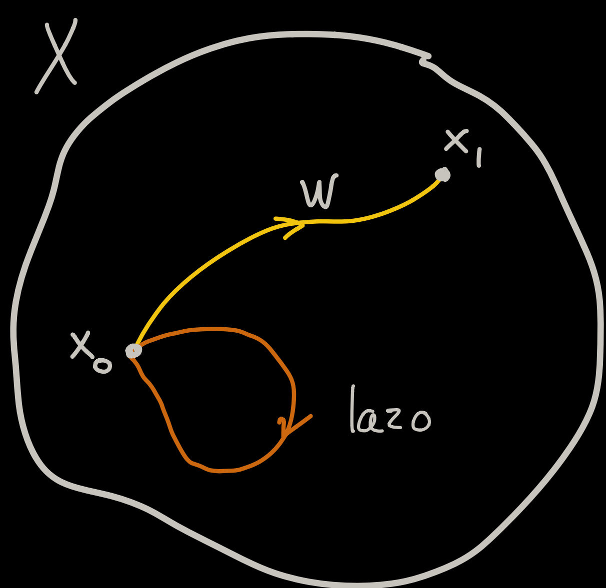
# Cap. 5 El Grupo Fundamental

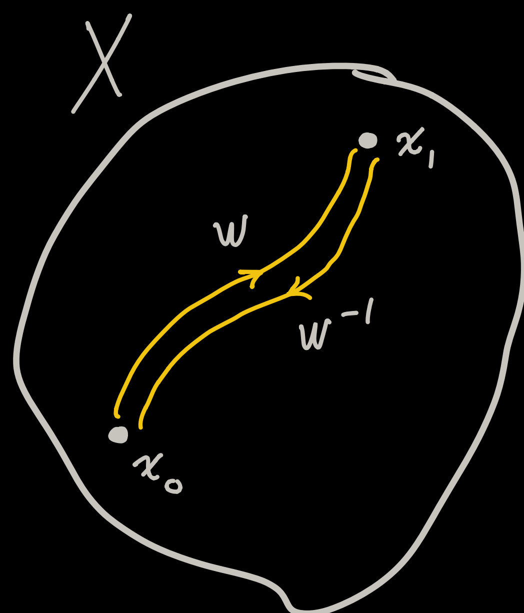
## 5.1 Definición y Propiedades.

Def: $X$ espacio topológico, $x_0, x_1 \in X$

- Trayectoria en $X$, de $x_0$ a $x_1$, es una función continua $w: I \to X$ tal que: $w(0) = x_0$
  $w(1) = x_1$.

- Si $x_0 = x_1$, $w$ es un lazo c/pto. incicial y pto. final $x_0$ (lazo basado en $x_0$)




- Si $w$ es una trayectoria de $x_0$ a $x_1$, se define la trayectoria inversa $w^{-1}: I \to X$

$$w^{-1}(s) := w(1-s) \quad \forall s \in [0,1].$$

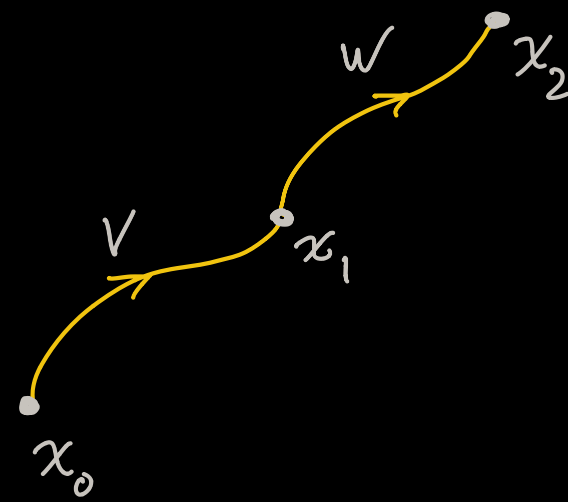
- Si $x_0 \in X$, denotamos por $C_{x_0}$ a la trayectoria constante $C_{x_0}(s) = x_0 \quad \forall s.$

Def: (Producto de trayectorias)

Si $v$ trayectoria en $X$, de $x_0$ a $x_1$
$w$ " " " $x_1$ a $x_2$
} trayectorias concatenables

definimos el producto $v \cdot w$:

$$(v \cdot w)(s) = \begin{cases} v(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ w(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$




Obs:

1. Si $v$, $w$ son lazos en $X$ basados en $x_0$, $v \cdot w$ es un lazo basado en $x_0$.

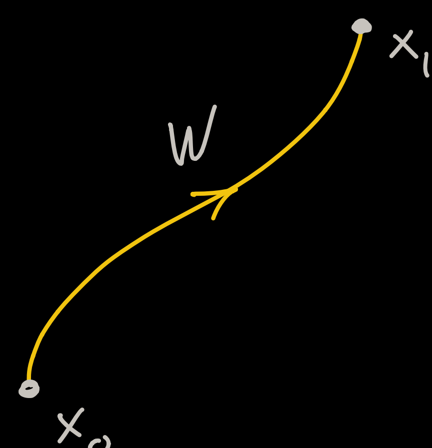
2. Si $w$ es una trayectoria de $x_0$ a $x_1$, podemos considerar los sigs. productos:

$$w \cdot w^{-1}, \quad w^{-1} \cdot w, \quad c_{x_0} \cdot w, \quad w \cdot c_{x_1}$$

En general: $c_{x_0} \cdot w \neq w$

$$w \cdot w^{-1} \neq c_{x_0}$$

etc.



Def: Dos trayectorias $v, w : I \to X$, de $x_0$ a $x_1$, son homotópicas (con extremos fijos) si $\exists$ una función continua:

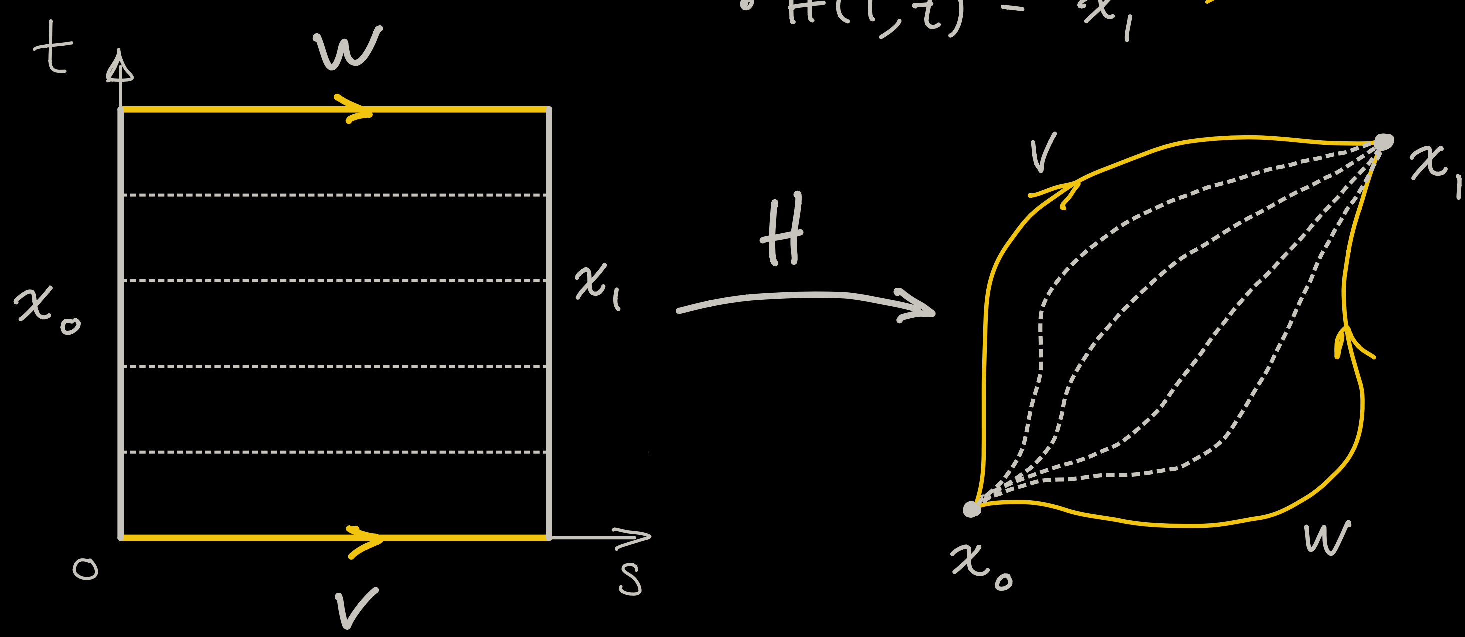
$H : I \times I \longrightarrow X$ tal que:

- $H(s,0) = v(s)$
- $H(s,1) = w(s)$

$\forall s \in I$

- $H(0,t) = x_0$
- $H(1,t) = x_1$

$\forall t \in I$




$H$ es una homotopía entre $v$ y $w$

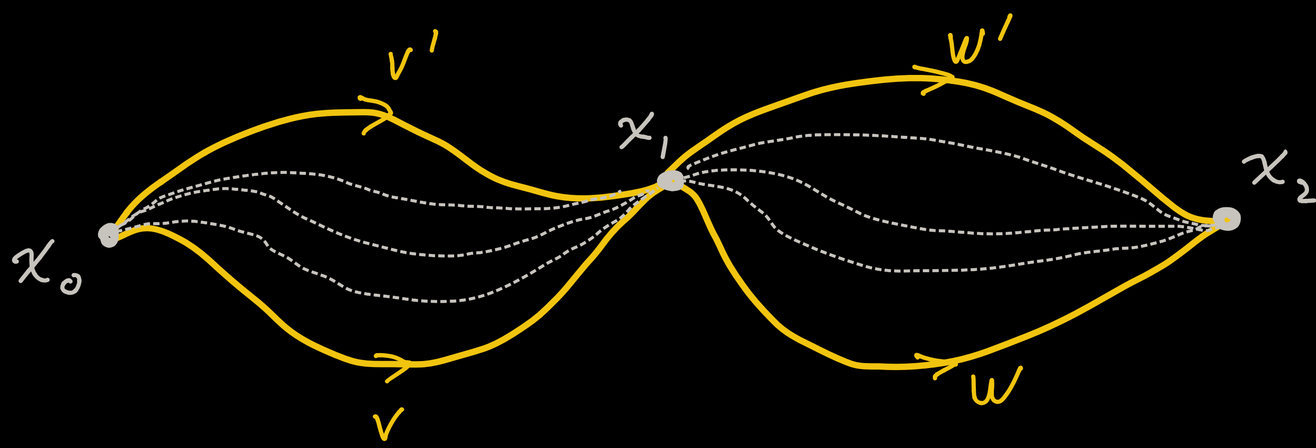
Escribimos: $v \simeq w \text{ rel } \partial I$

Esta es una R.E.:

- $v \simeq v \text{ rel } \partial I$
- $v \simeq w \text{ rel } \partial I \Rightarrow w \simeq v \text{ rel } \partial I$
- Si $u \simeq v \text{ rel } \partial I$ y $v \simeq w \text{ rel } \partial I$ entonces $u \simeq w \text{ rel } \partial I$.

Notación: $[w]$ = clase de homotopía de $w$.

Lema: Si $v \simeq v'$ rel $I$, $w \simeq w'$ rel $I$, entonces: $v \cdot w \simeq v' \cdot w'$ rel $\partial I$.




Dem: Si $F: v \simeq v'$ y $G: w \simeq w'$, definimos

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, $H$ es una homotopía entre $v \cdot w$ y $v' \cdot w'$. ▨

Def: (Producto de clases de homotopía)

Si $v, w : I \to X$ son trayectorias concatenables, definimos el producto de las clases $[v]$ y $[w]$

$$[v] \cdot [w] := [v \cdot w].$$

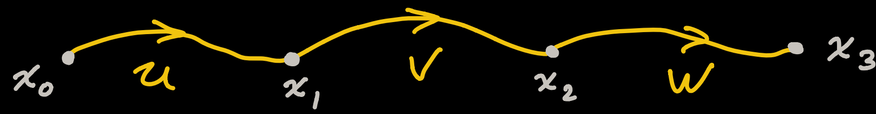
Lema:

a). Si $u$ trayectoria de $x_0$ a $x_1$,

$v$ " " $x_1$ a $x_2$,

$w$ " " $x_2$ a $x_3$

entonces $(u\cdot v)\cdot w \simeq u\cdot(v\cdot w)$ rel $\partial I$.




b). Si $u: I \to X$ trayectoria de $x_0$ a $x_1$

entonces:

$$c_{x_0}\cdot u \simeq u \quad \text{rel } \partial I$$

$$u\cdot c_{x_1} \simeq u \quad \text{rel } \partial I$$

c). Si $u: I \to X$ trayectoria de $x_0$ a $x_1$

y $u^{-1}: I \to X$ la trayectoria inversa

entonces:

$$u\cdot u^{-1} \simeq c_{x_0} \quad \text{rel } \partial I$$

$$u^{-1}\cdot u \simeq c_{x_1} \quad \text{rel } \partial I.$$

Obs: Pasando a clases de homotopía:

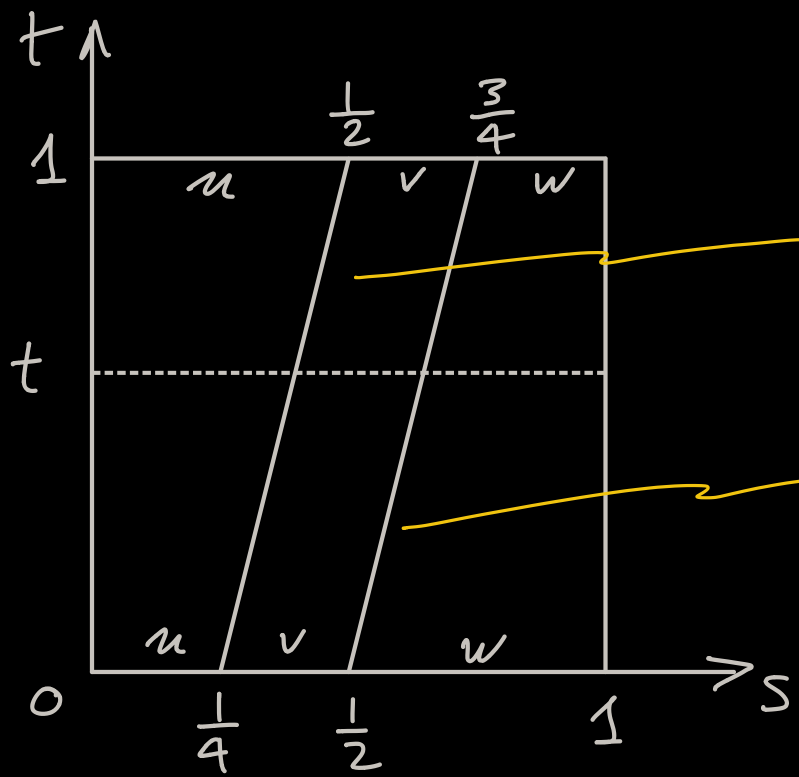
a). $([u]\cdot[v])\cdot[w] = [u]\cdot([v]\cdot[w])$

b). $[c_{x_0}]\cdot[u] = [u]$ & $[u]\cdot[c_{x_1}] = [u]$

c). $[u]\cdot[u^{-1}] = [c_{x_0}]$ & $[u^{-1}]\cdot[u] = [c_{x_1}]$.

Dem:

a) $(u \cdot v) \cdot w \simeq u \cdot (v \cdot w)$




$t = 4s - 1$

$s = \frac{t+1}{4}$

$t = 4s - 2$

$s = \frac{t+2}{4}$

$$H(s,t) = \begin{cases} u\left(\frac{4s}{t+1}\right) & \text{si} \quad 0 \le s \le \frac{t+1}{4} \\ v(4s-t-1) & \text{si} \quad \frac{t+1}{4} \le s \le \frac{t+2}{4} \\ w\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & \text{si} \quad \frac{t+2}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

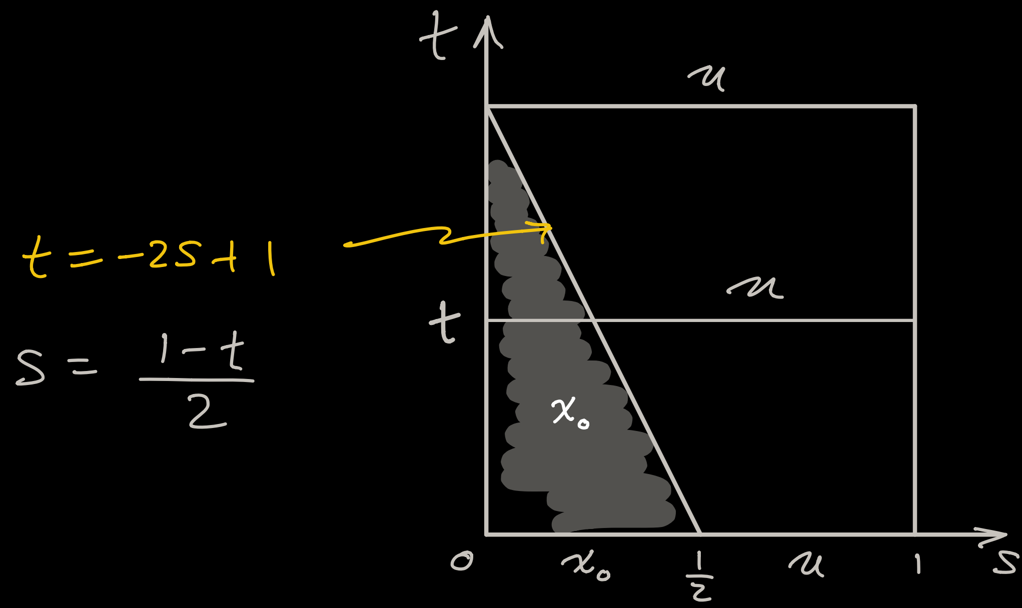
Ejem:

$$0 \le s \le \frac{t+1}{4}$$

$$0 \le 4s \le t+1$$

$$0 \le \frac{4s}{t+1} \le 1$$

b). $c_{x_0} \cdot u \simeq u$

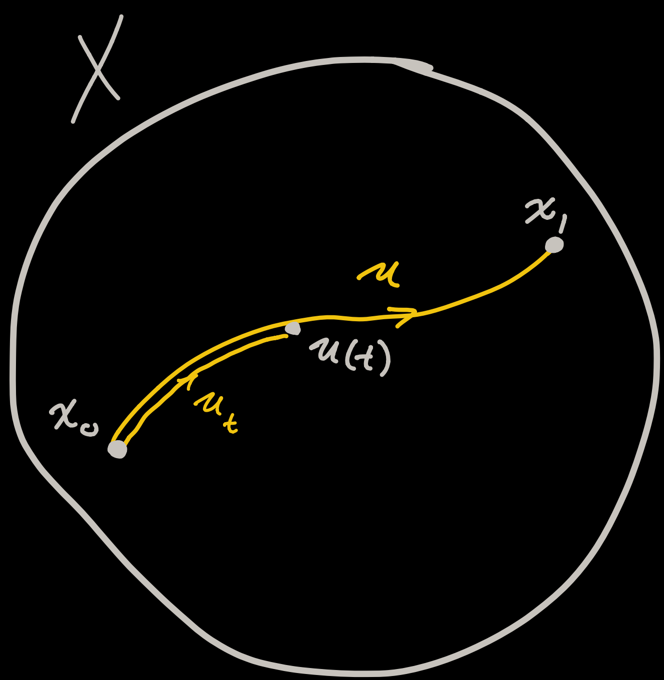



$$F(s,t) = \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ u\left(\frac{2s-t+1}{t+1}\right) & \text{si} \quad \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$F$ es una homotopía entre $c_{x_0} \cdot u$ y $u$.

Similarmente: $u \cdot c_{x_1} \simeq u$.

c) $u \cdot u^{-1} \simeq c_{x_0}$, trayectoria cte.




Para $t \in I$ fijo:

$u_t(s) := u(st)$.

$0 \leq s \leq 1$

$t = 0 \quad u_0 = c_{x_0}$

$t = 1 \quad u_1 = u$

Homotopía: $G_t = u_t \cdot u_t^{-1}$

$G_0 = c_{x_0}$

$G_1 = u \cdot u^{-1}$

$$G(s,t) = \begin{cases} u(2st) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ u(2t(1-s)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

lineal decreciente

$f(s) = 2t(1-s)$

$f(\frac{1}{2}) = t$

$f(1) = 0$

$\therefore \quad G : c_{x_0} \simeq u \cdot u^{-1}$. ▨

Tma: (Grupo fundamental de $X$)

Si $(X, x_0)$ es un espacio c/pto. base $x_0 \in X$, entonces el conjunto:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[w] \mid w: I \to X \text{ lazo basado en } x_0\}$$

es un grupo con el producto $[v]\cdot[w] = [v\cdot w]$.

Elto. identidad: $[c_{x_0}]$

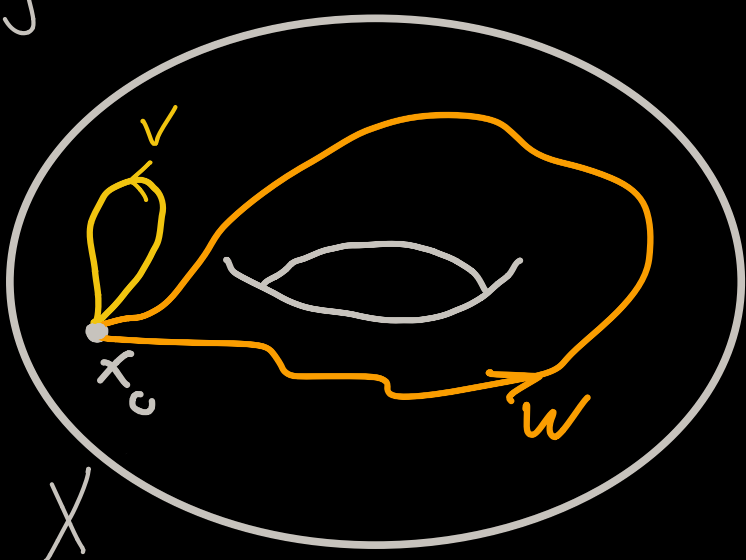
Inversos: $\alpha = [w]$, $\alpha^{-1} = [w^{-1}]$.

Def:

$\pi_1(X, x_0)$ = grupo fundamental de $X$ basado en $x_0$.

= primer gpo. de homotopía de $X$

Ejem:




$[v], [w] \in \pi_1(X, x_0)$

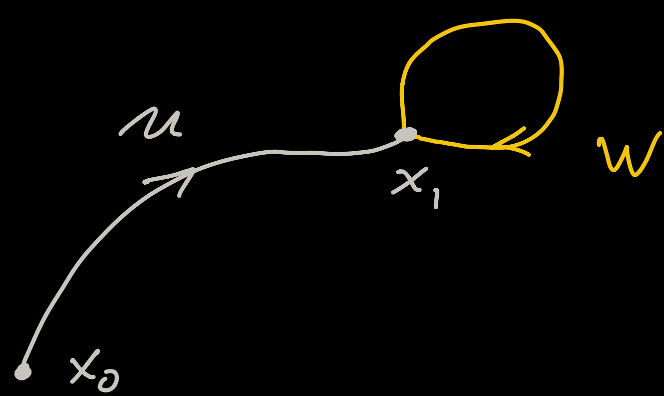
$[v]$ = elto. neutro

$[w]$ = elto. no trivial

Tma: Si $u : I \to X$ es una tray. de $x_0$ a $x_1$, la función:

$$u_+ : \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$$
$$[w] \longmapsto [u]\cdot[w]\cdot[u^{-1}]$$

es un isomorfismo de grupos.




Dem: $u_+$ es homomorfismo

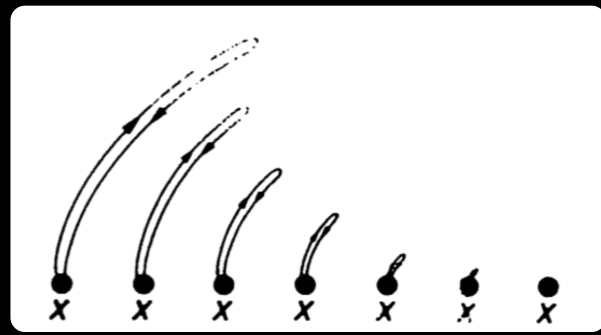
$$\begin{aligned} u_+([v]\cdot[w]) &= [u]\cdot([v]\cdot[w])\cdot[u^{-1}] \\ &= ([u]\cdot[v]\cdot[u^{-1}])\cdot([u]\cdot[w]\cdot[u^{-1}]) \\ &= u_+([v])\cdot u_+([w]). \end{aligned}$$

El homomorfismo asociado a la tray. inversa

$$(u^{-1})_+ : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

es el inverso de $u_+$ $\square$

Def: Si $w: I \to X$ es un lazo

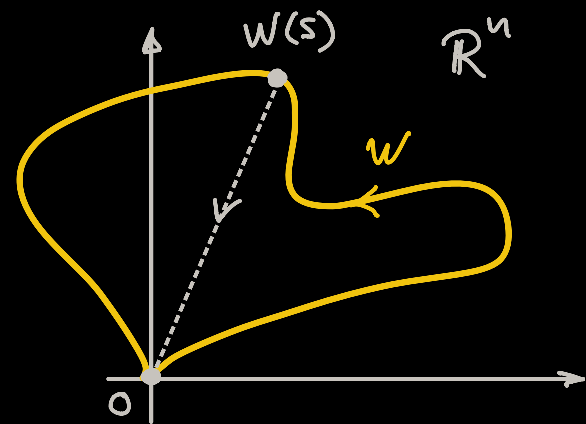


y $w \simeq c_{x_0}$ rel $\partial I$,
$w$ es nul-homotópico ó contraíble.

Ejem: $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 1$ (grupo trivial)

Si $w: I \to \mathbb{R}^n$ es un lazo basado en $0$, ent. $w$ es nul-homotópico

$H(s,t) = t \cdot w(s)$



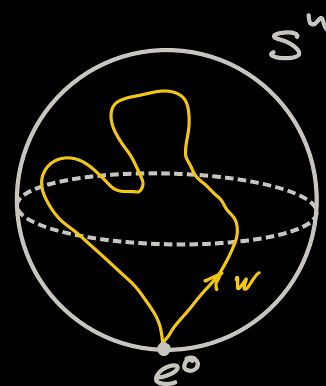

Mas aún, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, $\pi_1(A) = 1$.

Def: Diremos que $X$ es simplemente conexo si $X$ es arco-conexo y $\pi_1(X, x_0) = 1$.

Ejem: $\pi_1(S^n) = 1$ para $n \geq 2$.

$I = e^0_\alpha \cup e^0_\beta \cup e^1$
$S^n = e^0 \cup e^n$

$w: I \to S^n$ lazo
$w \simeq w' =$ mapeo celular
$\therefore w' =$ mapeo cte. $e^0$



Obs: Como $I/_{\partial I} \approx S^1$, todo lazo $w: I \to X$ se puede ver como una función $\tilde{w}: S^1 \to X$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "w"] \arrow[d] & X \\ S^1 = I/_{\partial I} \arrow[ur, dashed, "\bar{w}"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "//"] & \end{tikzcd}$$

i.e. $w: I \to X$ pasa al cociente.

& $\bar{w}(1) = x_0$

Recíprocamente, dado $\varphi: (S^1, 1) \to (X, x_0)$, la composición

$$\begin{tikzcd} t \arrow[d, mapsto] & I \arrow[r, dashed] \arrow[d, "p"] & X \\ e^{2\pi i t} & S^1 \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

es un lazo $I \to X$ basado en $x_0$.

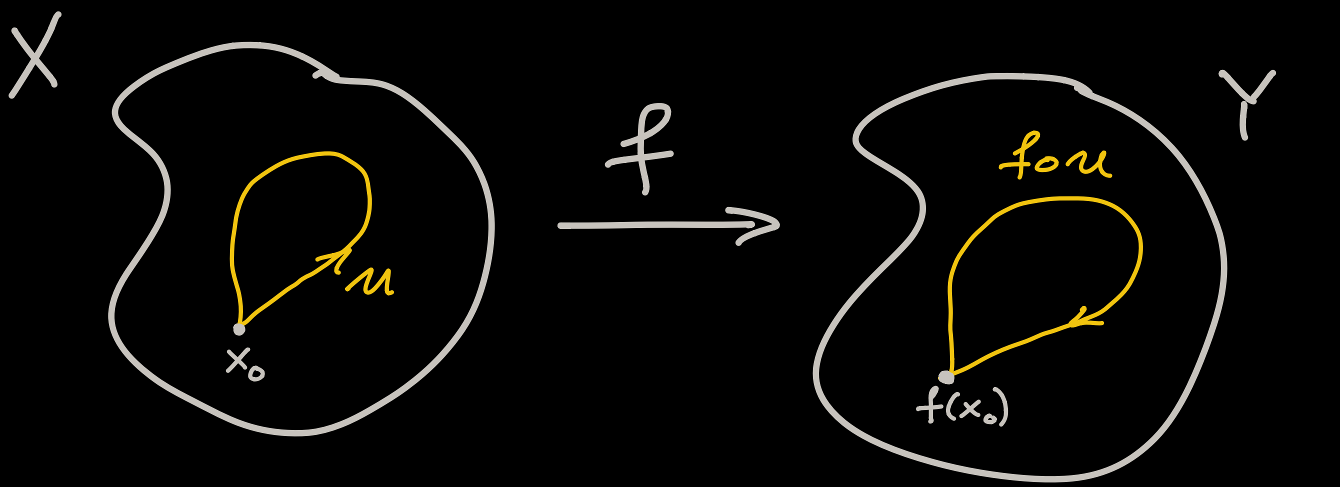
Tma: La correspondencia

$$\begin{aligned} [S^1, 1; X, x_0] &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\varphi] &\longmapsto [\varphi \circ p] \end{aligned}$$

es una biyección.

Lema: Sea $f: X \to Y$ un mapeo. Entonces:

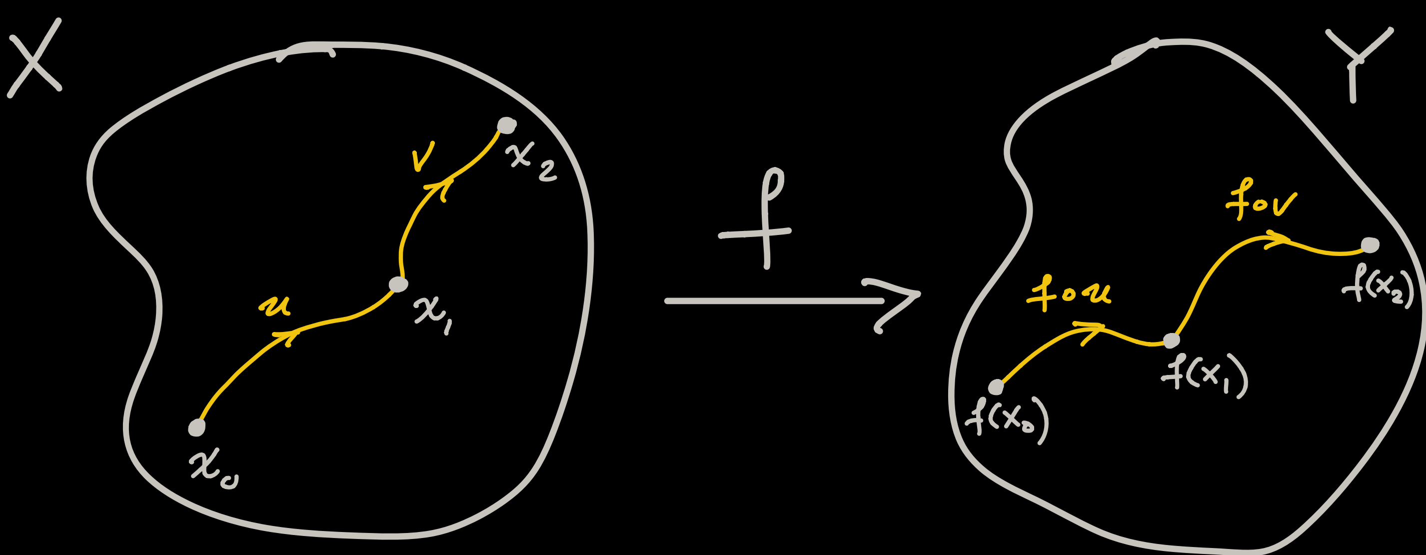
a) $u: I \to X$ trayect. en $X$ $\Rightarrow$ $f \circ u: I \to Y$ trayect. en $Y$.




b) $u \simeq v$ rel $\partial I$ $\Rightarrow$ $f \circ u \simeq f \circ v$ rel $\partial I$.

c) Si $u$ y $v$ trayectorias concatenables en $X$, entonces $f \circ u$ y $f \circ v$ son concatenables y:

$$f \circ (u \cdot v) = (f \circ u) \cdot (f \circ v).$$



Tma: Si $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ es un mapeo de espacios basados entonces la función:

$$\begin{aligned} f_\# : \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y,y_0) \\ [u] &\longmapsto [f\circ u] \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

$f_\#$ es el homomorfismo inducido por $f$.

Tma:

a) Si $f=id_X$ es la identidad, entonces $f_\#$ es la identidad de $\pi_1(X,x_0)$.

b) Si $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ y $g:(Y,y_0)\longrightarrow(Z,z_0)$ son mapeos de espacios basados, entonces:
$(g\circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.

$$(X,x_0)\xrightarrow{f}(Y,y_0)\xrightarrow{g}(Z,z_0)$$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)_\#"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "g_\#"] & \pi_1(Z,z_0) \end{tikzcd}$$

c) Si $f\simeq g:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ entonces $f_\# = g_\# : \pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$.

Tma: Si $f: X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo inducido

$$f_\# : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo.

Dem: Ejercicio. Notar que una inversa homotópica $g: Y \to X$ no nec. preserva el pto. base.

Cor: Si $A \subseteq X$ es un retracto por deformación, entonces $\forall x_0 \in A$, el homomorfismo inducido por la inclusión $i: A \hookrightarrow X$ es un isomorfismo:

$$i_\# : \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) .$$

Tma: Si $X_0$ es la componente arco-conexa de $X$, que contiene a $x_0$, entonces el inducido por la inclusión $i: X_0 \hookrightarrow X$ es isomorfismo

$$i_\# : \pi_1(X_0, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) .$$