5.2 El gpo. fundamental de S^1.

Sea $p: \mathbb{R} \to S^1$, $\quad p(t) = e^{2\pi i t}$

Recordemos: si $\varphi: I \to \mathbb{R}$ es continua tal que

$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$

$\exists!\ \hat{\varphi}: S^1 \to S^1$ continua tal que $\hat{\varphi} \circ p = p \circ \varphi$

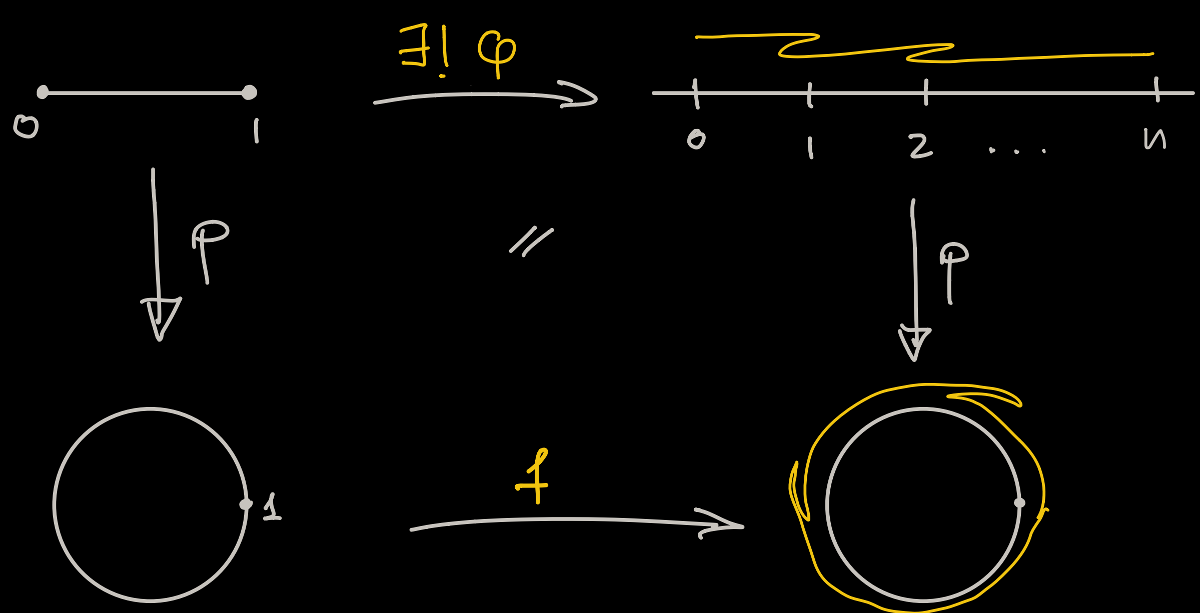
i.e. $\hat{\varphi}(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi(t)}$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "\exists!\ \hat{\varphi}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Recíprocamente:

Lema: Para todo mapeo $f: S^1 \to S^1$, con $f(1) = 1$
$\exists!\ \varphi: (I, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ continua, tal que $f = \hat{\varphi}$

i.e. $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \varphi(t)}$ $\qquad t = 1 \Rightarrow \varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$.



$\deg(f) := n$

Definimos $\mu : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ del sig. modo:

Dado un lazo $w : I \longrightarrow S^1$ (basado en $1 \in S^1$)
$\exists!$ función $\tilde{w} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que
$\tilde{w}(0) = 0$ y $p \circ \tilde{w} = w$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[ur, "\exists!\ \tilde{w}"] \arrow[r, "w"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \\
S^1 = I/\partial I \arrow[ur, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

Idea: $\tilde{w}$ desenrolla al lazo w.

i.e. $w(t) = e^{2\pi i \tilde{w}(t)}$

$t = 1 \Rightarrow 1 = e^{2\pi i \tilde{w}(1)} \Rightarrow \tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$.

Def: $\tilde{w}$ se llama un levantamiento de w si $p \circ \tilde{w} = w$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[ur, "\exists!\ \tilde{w}"] \arrow[r, "w"] & S^1
\end{tikzcd}$$

lazo basado en 1

$\tilde{w}(0) = 0$

$\tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$

grado de w

Tma: La función $\mu : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$
$$[w] \longmapsto \tilde{w}(1)$$
es un isomorfismo de grupos.

Dem: μ es homomorfismo

Sean $u, v : I \to S^1$ lazos basados y
$\tilde{u}, \tilde{v} : I \to \mathbb{R}$ los corresp. levantamientos:

$$\begin{array}{l|l} p \circ \tilde{u} = u & p \circ \tilde{v} = v \\ \tilde{u}(0) = 0 & \tilde{v}(0) = 0 \\ \tilde{u}(1) = m & \tilde{v}(1) = n \\ \therefore \quad \mu([u]) = m & \mu([v]) = n. \end{array}$$

Sea $\tilde{w} : I \to \mathbb{R}$ dada por: $\tilde{w} = \tilde{u} \cdot (m + \tilde{v})$

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ m + \tilde{v}(t) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Entonces: • $p \circ \tilde{w} = u \cdot v$ i.e. $\tilde{w}$ es el ! levantamiento
• $\tilde{w}(0) = 0$ de $u \cdot v$ que empieza en 0

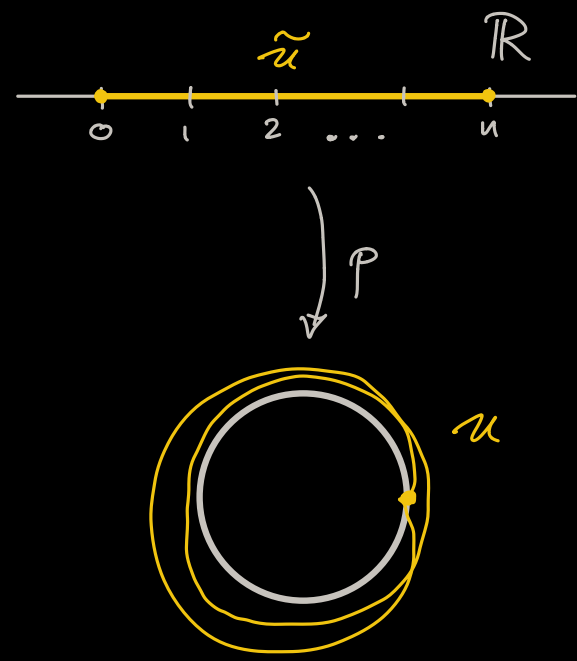
$$\therefore \quad \mu([u \cdot v]) = \tilde{w}(1) = m + n$$

$$\Rightarrow \quad \mu([u] \cdot [v]) = \mu([u]) + \mu([v]).$$

$\underline{\mu \text{ es sobre:}}$ Dado $n \in \mathbb{Z}$, definimos $u : I \to S^1$ por: $u(t) = e^{2\pi i n t}$

Entonces: $\tilde{u} : I \to \mathbb{R}$

$\tilde{u}(t) = nt$



es un levantamiento de u tal que $\tilde{u}(0) = 0$ y

$$\therefore \quad \mu([u]) = \tilde{u}(1) = n$$

$\underline{\mu \text{ es inyectiva:}}$ Supongamos $\mu[u] = 0$

es decir: $\tilde{u}(1) = 0 \in \mathbb{Z}$.

donde $\tilde{u} : I \to \mathbb{R}$ es el levantamiento de u que comienza en 0.

$\therefore$ $\tilde{u}$ es un lazo en $\mathbb{R}$, basado en 0 y es contraíble (homotopía de línea recta).

$\therefore$ $u = p \circ \tilde{u}$ es un lazo contraíble en S^1

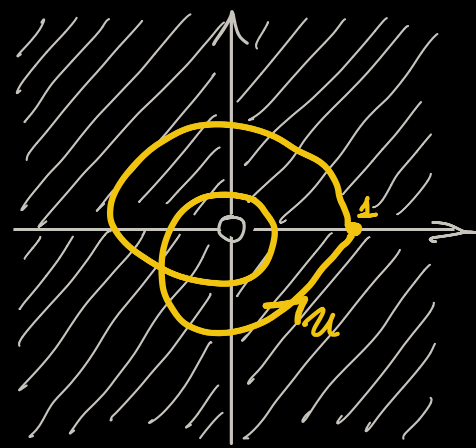
$\Rightarrow$ $[u] \in \pi_1(S^1, 1)$ es el elto. identidad

$\blacksquare$

Ejem:

$$\pi_1(\mathbb{C}\setminus 0, 1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{pues} \quad \mathbb{C}\setminus 0 \simeq S^1.$$

Sean:
$$i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}\setminus 0$$
$$r : \mathbb{C}\setminus 0 \longrightarrow S^1$$
$$z \longmapsto \frac{z}{|z|}$$



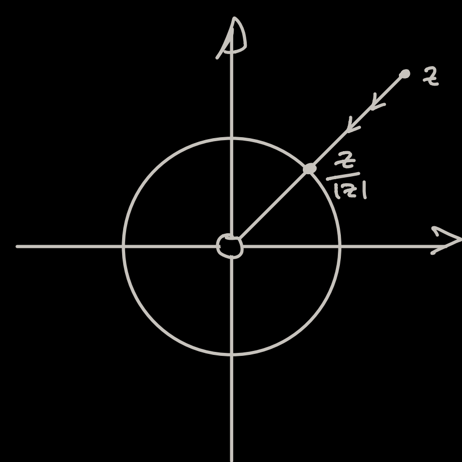
Entonces:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \mathbb{C}\setminus 0 \arrow[r, "r"] & S^1 \end{tikzcd} \qquad r \circ i = id_{S^1}$$

$$\mathbb{C}\setminus 0 \xrightarrow{r} S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{C}\setminus 0 \qquad i \circ r \simeq id_{\mathbb{C}\setminus 0}$$
$$z \longmapsto \frac{z}{|z|}$$

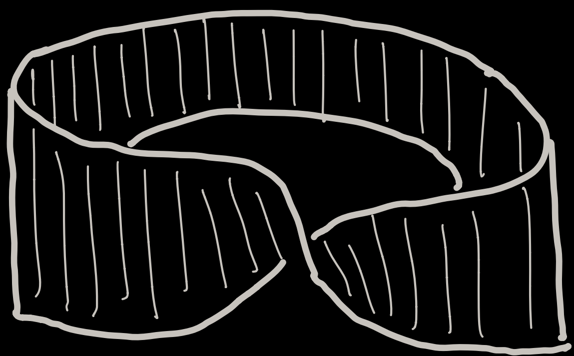
$r \circ i$ es homotópica a la identidad

$$H(z,t) = (1-t)z + t\frac{z}{|z|}$$



$$\mathbb{C}\setminus 0 \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{C}\setminus 0, 1) \cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

Ejem: Si M es una banda de Möbius, entonces $M \simeq S^1$ y por lo tanto



M

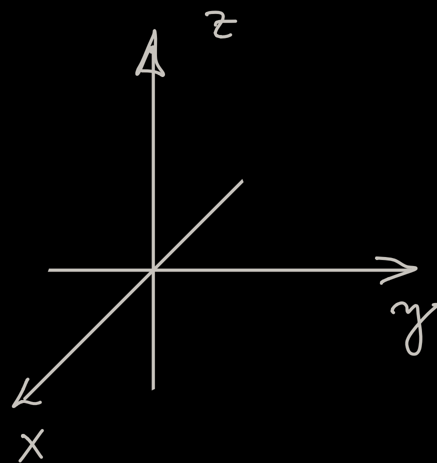
$$\pi_1(M, x_0) \cong \mathbb{Z}.$$

generador = ecuador de M.

Ejem: $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$

$$X \simeq \mathbb{R}^2 \setminus 0$$

$$\therefore \ \pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$$



$$\mathbb{R}^3 \setminus 0 \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathbb{R}^2 \setminus 0$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y)$$

Tma: Si (X, x_0) y (Y, y_0) espacios c/pto. base entonces:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Dem:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

proyecciones sobre 1a. y 2a. coordenada.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \arrow[dl, "p_\#"'] \arrow[dr, "q_\#"] & \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

homomorfismos inducidos

Sea

homomorfismo

$$(p_\#, q_\#) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$
$$[w] \longmapsto (p_\#[w], q_\#[w])$$

Afirmamos que $(p_\#, q_\#)$ es un isomorfismo.

Sobre: Sean $\alpha = [u] \in \pi_1(X, x_0)$ & $\beta = [v] \in \pi_1(Y, y_0)$

Entonces, la función
$$\begin{aligned}(u,v): I &\longrightarrow X \times Y \\ t &\longmapsto (u(t), v(t))\end{aligned}$$
es un lazo en $X \times Y$, basado en (x_0, y_0).

Si $\gamma = [(u,v)] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$

entonces:
$$\begin{aligned}(p_\#, q_\#)(\gamma) &= (p_\#(\gamma), q_\#(\gamma)) \\ &= ([u], [v]).\end{aligned}$$

$\therefore (p_\#, q_\#)$ es supráyectiva.

Inyectiva: Sea $\gamma = [w] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$
$w(t) = (w_1(t), w_2(t))$

tal que:
$$(p_\#, q_\#)(\gamma) = (p_\#(\gamma), q_\#(\gamma)) = ([c_{x_0}], [c_{y_0}])$$

i.e.
$$\begin{aligned}([p \circ w], [q \circ w]) &= ([c_{x_0}], [c_{y_0}]) \\ ([w_1], [w_2]) &= ([c_{x_0}], [c_{y_0}])\end{aligned}$$

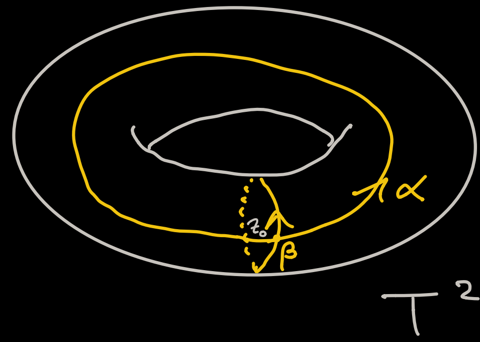
Si $H_1 : w_1 \simeq c_{x_0}$, entonces $H = (H_1, H_2)$
& $H_2 : w_2 \simeq c_{y_0}$ es una homotopía entre w y $c_{(x_0, y_0)}$. $\blacksquare$

Ejem: $T^2 = S^1 \times S^1$, toro de dim. 2

$z_0 = (1,1)$

$\therefore \pi_1(T^2,(1,1)) \cong \pi_1(S^1,1) \times \pi_1(S^1,1)$

$\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ gpo. con la +

= gpo. cíclico infinito

$\cong \langle \alpha^n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$ notación mult.

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ notación aditiva

$\cong \{(\alpha^m, \beta^n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ notación multiplicativa

$\cong \{\alpha^m \cdot \beta^n \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$

α y β conmutan.

Ejem: $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ toro de dim. n

$\Rightarrow \pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$ gpo. abeliano libre, rango n.

Ejemplos: Homomorfismos inducidos

a). Si $g_n : S^1 \longrightarrow S^1$ es el mapeo $g_n(z) = z^n$, entonces:

$$g_{n\#} : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

$$\alpha \longmapsto \alpha^n$$

En notación aditiva:

$$g_{n\#} : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$$

b). Sea $f : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ el mapeo

$$f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Si $\alpha, \beta \in \pi_1(S^1 \times S^1, z_0)$ generadores

$$f_\# : \pi_1(S^1 \times S^1, z_0) \longrightarrow \pi_1(S^1 \times S^1, z_0)$$

$$f_\#(\alpha) = \alpha^a \beta^c$$

$$f_\#(\beta) = \alpha^b \beta^d$$

Aditivamente: $f_\#(1,0) = (a,c)$, $f_\#(1,0) = (b,d)$.