5.3 El Teorema de Seifert - van Kampen

Resumen: El gpo. fundamental es un funtor

$$\pi_1 : Top_* \longrightarrow gr$$

$$(X, x_0) \rightsquigarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0) \rightsquigarrow f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

- $id : (X, x_0) \to (X, x_0)$, $id_\# = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$

Entonces: $f : X \xrightarrow{\simeq} Y \Rightarrow f_\# : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, f(x_0))$

- $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $f \simeq g \Rightarrow f_\# = g_\#$
- $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$

En particular: $X \simeq * \Rightarrow \pi_1(X) = 1$ gpo. trivial

- $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.
- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

Grupo libre (no abeliano) en dos generadores

$\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z} \cong \langle b \rangle = \{b^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

- Palabras en a y b: Sucesiones finitas de símbolos a^m, b^n con $m, n \in \mathbb{Z}$ (incluyendo la palabra vacía).

Ejems:
- $a^3 b^{-2} a^{-1} b a^2$
- $b a b^{-1} a^{-1}$
- $a^0 b^5 b^0 a^{-2}$
- $a^3 b^2 b^5 a^{-2}$
- 1 = palabra vacía.

Dada una palabra en a y b, podemos efectuar las sigs. reducciones:

1. Remplazar $a^p a^q$ por a^{p+q} (y similarmente para b).
2. Suprimir a^0 y b^0.

Ejems:

$$a^3 b^2 b^4 a^{-1} a^5 = a^3 b^6 a^4$$

$$\begin{aligned} a^7 b a^4 a^{-4} b^2 &= a^7 b a^0 b^2 \\ &= a^7 b b^2 \\ &= a^7 b^3 \end{aligned}$$

- Una palabra en a y b que no puede reducirse, se llama palabra reducida. Dichas palabras son sucesiones alternadas de símbolos a^m y b^n, con exponentes $\neq 0$.

- Toda palabra en a y b admite una única expresión como palabra reducida.

Def: El gpo. libre en dos generadores $F[a,b]$ es el conjunto de palabras reducidas, con el producto dado por: yuxtaposición y reducción.

Ejems: $(aba^{-1}b^{-1})(b^7ab^3) = aba^{-1}b^6ab^3$

$$(b^2a^3)(a^{-3}b^{-2}) = b^2b^{-2} = 1$$

- $F[a,b]$ es un gpo. no abeliano (a y b no conmutan).

Identidad: Palabra vacía 1

Inverso de $a^{m_1}b^{n_1}\ldots a^{m_k}b^{n_k}$ es $b^{-n_k}a^{-m_k}\ldots b^{-n_1}a^{-m_1}$.

Notación: $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ = producto libre de dos copias de $\mathbb{Z}$

$\langle a, b\rangle$ = gpo. libre en dos generadores a y b

Producto libre de G_1 y G_2 (generalización de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$)

Sean G_1 y G_2 gpos. y consideremos las palabras dadas por elementos de G_1 y G_2:

$$g_1 g_2 \dots g_n \quad \text{con } g_i \in G_1 \text{ ó } G_2$$

Reducción:

1. Si dos letras consecutivas g_i, g_{i+1} pertenecen a G_1, se remplazan por su producto $g_i \cdot g_{i+1} \in G_1$ (y similarmente si $g_i, g_{i+1} \in G_2$).
2. Los elementos identidad de G_1 y G_2 se pueden eliminar.

- Una palabra reducida es una sucesión alternada de elementos de G_1 y G_2.

Def: El producto libre $G_1 * G_2$ es el conjunto de palabras reducidas dotado con el producto obvio: yuxtaposición y reducción de palabras.

Obs:

a). G_1 y G_2 son subgrupos de $G_1 * G_2$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &: G_1 \longrightarrow G_1 * G_2 \\ \varphi_2 &: G_2 \longrightarrow G_1 * G_2 \end{aligned}\right\} \text{inclusiones.}$$

b) Si $G_1 = 1$, entonces $G_1 * G_2 = G_2$.
(y similarmente, si $G_2 = 1$ ent. $G_1 * G_2 = G_1$).

c) $G_1 * G_2 \cong G_2 * G_1$

Ejem: $G_1 = \mathbb{Z}/2 = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$ $\qquad a^{-1} = a$
$G_2 = \mathbb{Z}/2 = \langle b \mid b^2 = 1 \rangle$ $\qquad b^{-1} = b$

$G_1 * G_2$ consiste de los elementos:

$1,\ a,\ ab,\ aba,\ abab, \dots$
$b,\ ba,\ bab,\ baba, \dots$

Tma: Dados dos homomorfismos $h_1 : G_1 \to H$
$h_2 : G_2 \to H$

$\exists!$ homomorfismo $h : G_1 * G_2 \to H$ tal que $h|_{G_1} = h_1$ y $h|_{G_2} = h_2$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!\, h"] & H \\
G_2 \arrow[ur, "\varphi_2"'] \arrow[urr, bend right, "h_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

$h \circ \varphi_1 = h_1$

$h \circ \varphi_2 = h_2$

Ejem: Supongamos $x_1 y_1 \dots x_n y_n \in G_1 * G_2$

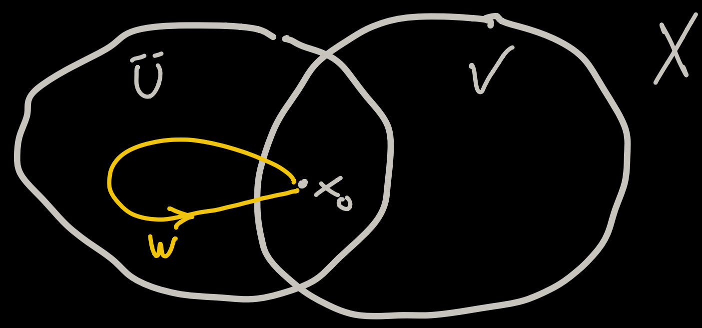
Entonces: $h(x_1 y_1 \dots x_n y_n) = h_1(x_1)\, h_2(y_2) \dots h_1(x_n)\, h_2(y_n)$
etc

De regreso a topología:

Sea $X = U \cup V$ espacio topológico

con:

- $\bar{U} \cap V \neq \emptyset$
- $x_0 \in U \cap V$



Entonces el sig. diagrama es conmutativo (dado por las inclusiones naturales):

$$\begin{tikzcd}
& \bar{U} \arrow[dr, "i"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "i'"] \arrow[dr, "j'"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & X \\
& V \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando grupo fundamental:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U, x_0) \arrow[dr, "i_\#"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i'_\#"] \arrow[dr, "j'_\#"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \pi_1(X, x_0) \\
& \pi_1(V, x_0) \arrow[ur, "j_\#"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema: Si $X = U \cup V$ con
- U, V abiertos
- U, V, $U \cap V$ arco-conexos

entonces $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de los homomorfismos $i_\#$ y $j_\#$.

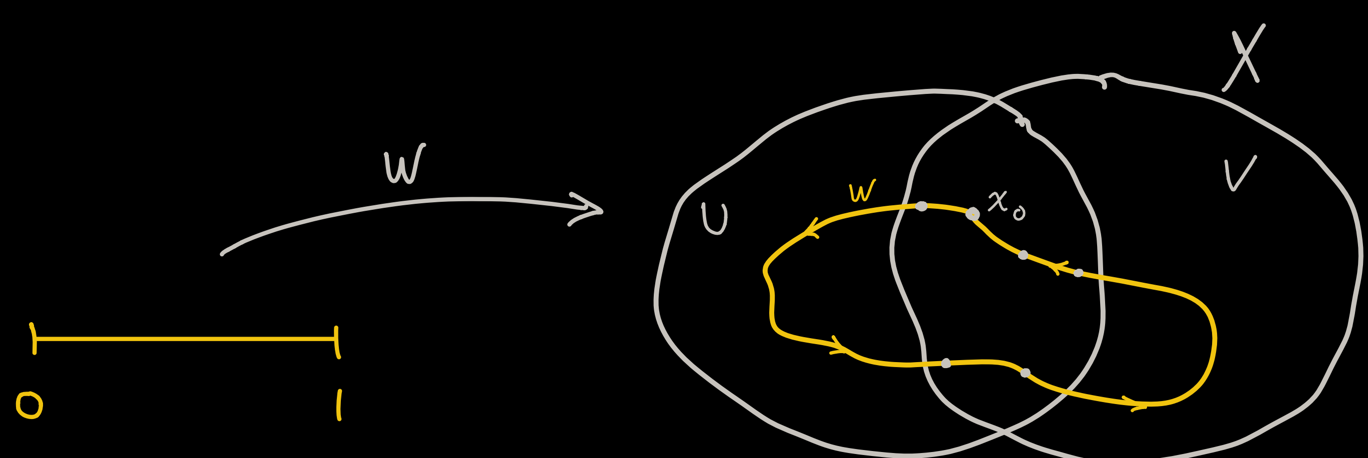
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U,x_0) \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "i_\#"] & \\
\pi_1(U,x_0) * \pi_1(V,x_0) \arrow[r, "i_\# \cdot j_\#"] & \pi_1(X,x_0) \\
\pi_1(V,x_0) \arrow[u] \arrow[ur, bend right, "j_\#"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el homomorfismo

$$i_\# \cdot j_\# : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es suprayectivo.

Dem: Sea $w : I \longrightarrow X$ lazo basado en x_0.

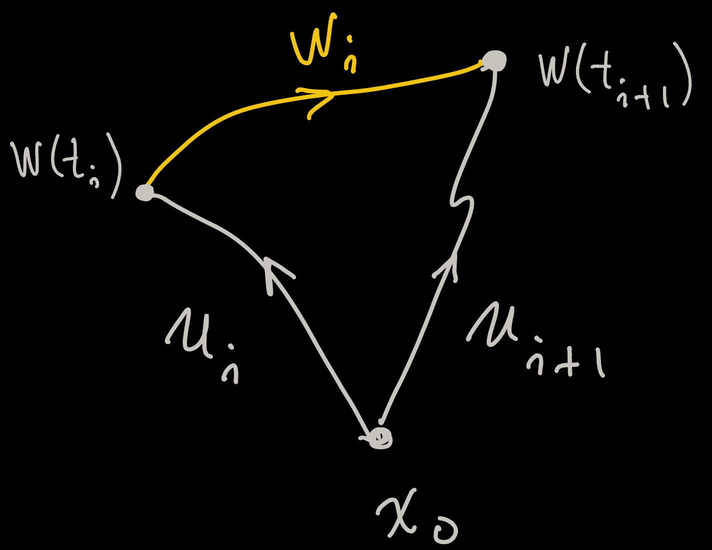


- U y V cubierta abierta de X
- $w^{-1}(\bar{U})$ y $w^{-1}(V)$ cubierta abierta de $I = [0,1]$.

Lema del núm. de Lebesgue $\implies$ $\exists$ partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tal que $w|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es una trayectoria en U ó en V.

Tomando el menor núm. de subintervalos posibles n, podemos suponer que $w(t_i) \in U \cap V$ $\forall\, i = 0, \dots, n$.

$\forall\, i = 0, 1, \dots, n$ sea $u_i : I \to X$ una trayectoria de x_0 a $w(t_i)$, contenida en $U \cap V$.



u_0 = tray. constante x_0
u_n = " " ".

Sea $v_i = u_i \cdot w_i \cdot u_{i+1}^{-1}$

v_i es un lazo en U ó V.

Entonces:

$$\begin{aligned} w &\simeq w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n \\ &\simeq (u_0 \cdot w_1 \cdot u_1^{-1}) \cdot (u_1 \cdot w_2 \cdot u_2^{-1}) \cdot \dots \cdot (u_{n-1} \cdot w_n \cdot u_n^{-1}) \\ &= v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Cor: Si $X = U \cup V$ con
- U, V abiertos
- $U, V, U\cap V$ arco-conexos
- U, V simplemente conexos

$\pi_1(U, x_0) = 1 = \pi_1(V, x_0)$

entonces: $\pi_1(X, x_0) = 1$.

Ejem: Para $n \geq 2$, $\pi_1(S^n, x_0) = 1$.

$U = S^n \setminus \{N\} \simeq *$
$V = S^n \setminus \{S\} \simeq *$

Lema: Con las hipótesis del lema anterior, el núcleo del epimorfismo

$$i_\# \cdot j_\# : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es el subgrupo normal generado por los elementos de la forma: $i'_\#(\alpha) \cdot j'_\#(\alpha)^{-1}$ con $\alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0)$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "i_\#"] & & \\
\pi_1(U\cap V, x_0) \arrow[ur, "i'_\#"] \arrow[dr, "j'_\#"'] & & \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \arrow[r, "i_\# \cdot j_\#"] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "j_\#"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dem: Ejercicio.

Tma: (Seifert - van Kampen)

Si $X = U \cup V$ con
- U, V abiertos
- $U, V, U \cap V$ arco-conexos

entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \Big/ \left\langle \begin{matrix} i'_\#(\alpha) \cdot j'_\#(\alpha)^{-1} \\ \alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0) \end{matrix} \right\rangle$$

Producto amalgamado de gpos. :

Sean $\varphi_1 : G_0 \longrightarrow G_1$ dos homomorfismos
$\varphi_2 : G_0 \longrightarrow G_2$

$N =$ subgpo. normal de $G_1 * G_2$ generado por los elementos $\varphi_1(g) \cdot \varphi_2(g)^{-1}$ $\forall g \in G_0$

Def: El producto amalgamado de G_1 y G_2 por G_0, es el cociente:

$$G_1 \underset{G_0}{*} G_2 := G_1 * G_2 \big/ N$$

Proyección canónica: $\psi : G_1 * G_2 \longrightarrow G_1 \underset{G_0}{*} G_2$

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "i"] \arrow[drrr, bend left, "\psi_1"] & & \\
G_0 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & G_1 * G_2 \arrow[r, "\psi"] & G_1 \underset{G_0}{*} G_2 \\
 & G_2 \arrow[ur, "j"'] \arrow[urrr, bend right, "\psi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\psi_1 := \psi \circ i$

$\psi_2 := \psi \circ j$

Producto amalgamado:

se impone esta relación

$$G_1 \underset{G_0}{*} G_2 := G_1 * G_2 \Big/ \begin{matrix} \varphi_1(g) = \varphi_2(g) \\ \forall g \in G_0 \end{matrix}$$

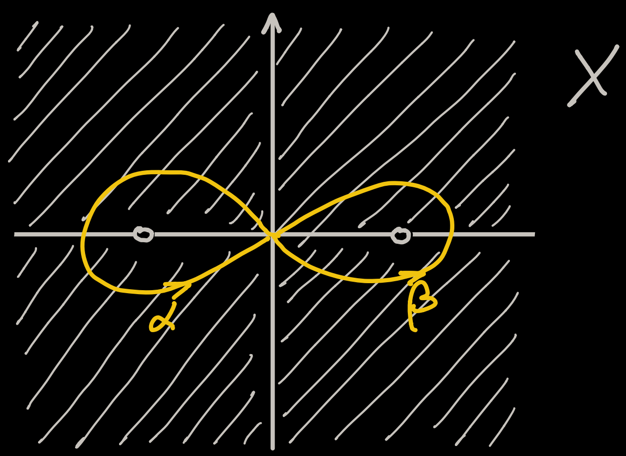
Tma: (Seifert-van Kampen)

Si $X = U \cup V$ con
- U, V abiertos
- $U, V, U \cap V$ arco-conexos

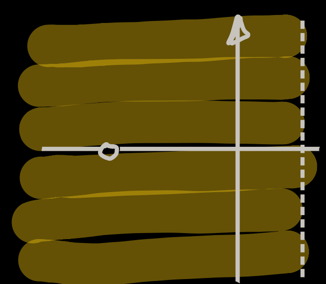
entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) \underset{\pi_1(U \cap V, x_0)}{*} \pi_1(V, x_0)$$

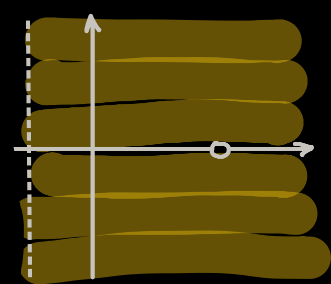
Ejem: $X = \mathbb{R}^2 - \{P, Q\}$, $\quad P = (-1,0)$, $Q = (1,0)$



$U = \{(x,y) \in X \mid x < \frac{1}{2}\}$ $\qquad$ $V = \{(x,y) \in X \mid x > -\frac{1}{2}\}$

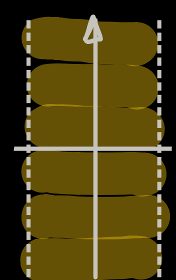


$\simeq S^1$



$\simeq S^1$

$U \cap V = \{(x,y) \in X \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$



$\simeq *$

$\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1(U \cap V) = 1$

$\therefore \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \underset{\{1\}}{*} \mathbb{Z}$

$\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

gpo. libre en dos generadores.

Cor: Si $X = U \cup V$,

- U, V abiertos
- $U, V, U \cap V$ arco-conexos
- V simplemente conexo

Entonces:

① $i_{\#} : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ es sobre.

② $\ker i_{\#}$ = subgpo. normal de $\pi_1(U, x_0)$ generado por la imagen de $i'_{\#} : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0)$.

$$\therefore \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) \Big/ \text{subgpo. normal gen. por } \operatorname{im}(i'_{\#}).$$

③ Si $U \cap V$ también es simplemente conexo, entonces

$$i_{\#} : \pi_1(U, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$$

es un isomorfismo.