5.4 Aplicaciones del Teorema de Seifert - van Kampen.

Producto amalgamado de gpos. :

Dados grupos : G_0, G_1, G_2 y

homomorfismos : $\varphi_1 : G_0 \longrightarrow G_1$

$\varphi_2 : G_0 \longrightarrow G_2$

Def: $G_1 \underset{G_0}{*} G_2 := G_1 * G_2 / N$ donde

N = subgpo. normal generado por los elementos $\varphi_1(g) \cdot \varphi_2(g)^{-1}$ $\forall g \in G_0$

$$
\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "\psi_1"] & & \\
G_0 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & G_1 * G_2 \arrow[r, "\psi"] & G_1 \underset{G_0}{*} G_2 \\
 & G_2 \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right, "\psi_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

ψ = proyección canónica

$\psi_1 = \psi \circ i$

$\psi_2 = \psi \circ j$

$$G_1 \underset{G_0}{*} G_2 := G_1 * G_2 \Big/ \begin{matrix} \varphi_1(g) = \varphi_2(g) \\ \forall g \in G_0 \end{matrix}$$

Sea $X = U \cup V$ espacio top. y $x_0 \in U \cap V$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "i"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "i'"] \arrow[dr, "j'"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & X \\
 & V \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando π_1:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[dr, "i_\#"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i'_\#"] \arrow[dr, "j'_\#"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[ur, "j_\#"'] &
\end{tikzcd}$$

Tma: (Seifert- van Kampen)

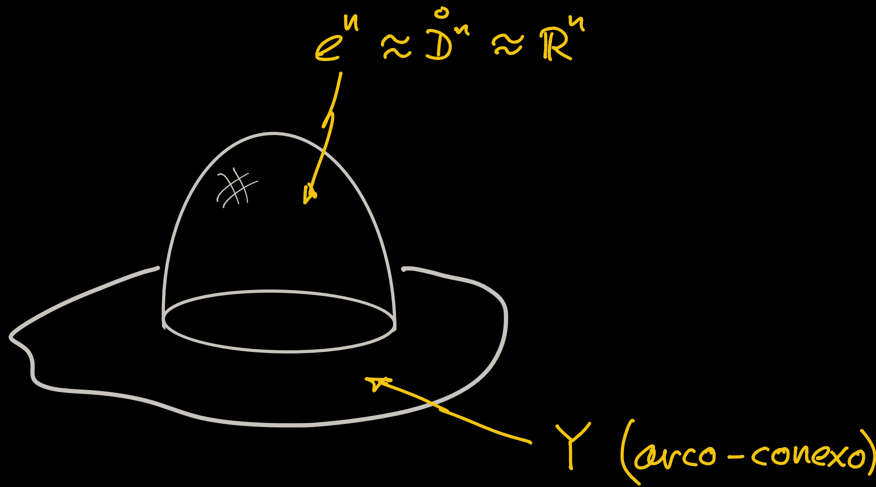
Si $X = U \cup V$ con
- U, V abiertos
- $U, V, U \cap V$ arco-conexos

entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) \underset{\pi_1(U \cap V, x_0)}{*} \pi_1(V, x_0)$$

Aplicación: Sea $f: S^{n-1} \to Y$ mapeo

$Y \cup_f e^n$ = espacio Y más una celda de dim. n.



$i: Y \longrightarrow Y \cup_f e^n$

inclusión natural

Tma: Si $n \geq 3$, entonces $i_\#: \pi_1(Y) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y \cup_f e^n)$ es un isomorfismo.

Dem:

$$U = (Y \cup_f e^n) \setminus 0 \subseteq Y \cup_f D^n$$

$$V = e^n$$

$$U \cap V = e^n \setminus 0$$

$$\therefore \quad \begin{array}{l} U \simeq Y \\ V \simeq * \\ U \cap V \simeq S^{n-1} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \pi_1(U) = \pi_1(Y) \\ \pi_1(V) = 1 \\ \pi_1(U \cap V) = \pi_1(S^{n-1}) = 1 \end{array}$$

$$\therefore \pi_1(Y \cup_f e^n) = \pi_1(U) \underset{\pi_1(U \cap V)}{*} \pi_1(V) = \pi_1(Y).$$

$\blacksquare$

Caso $n=2$

Tma: Si $f: S^1 \to Y$ mapeo, con $y_0 = f(1)$ entonces f determina un elemento $\alpha_f \in \pi_1(Y, y_0)$

y $$\pi_1(Y \cup_f e^2) \cong \pi_1(Y) / N(\alpha_f)$$

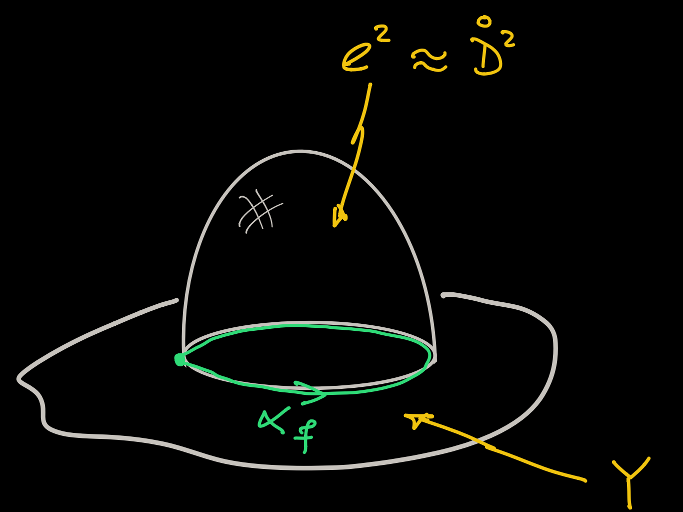
donde $N(\alpha_f) =$ subgpo. normal de $\pi_1(Y)$ generado por α_f.

Dem:

$$U = (Y \cup_f e^2) \setminus 0 \simeq Y$$

$$V = e^2 \simeq *$$

$$U \cap V = e^2 \setminus 0 \simeq S^1$$



$\therefore$ $\pi_1(U) = \pi_1(Y)$

$\pi_1(V) = 1$

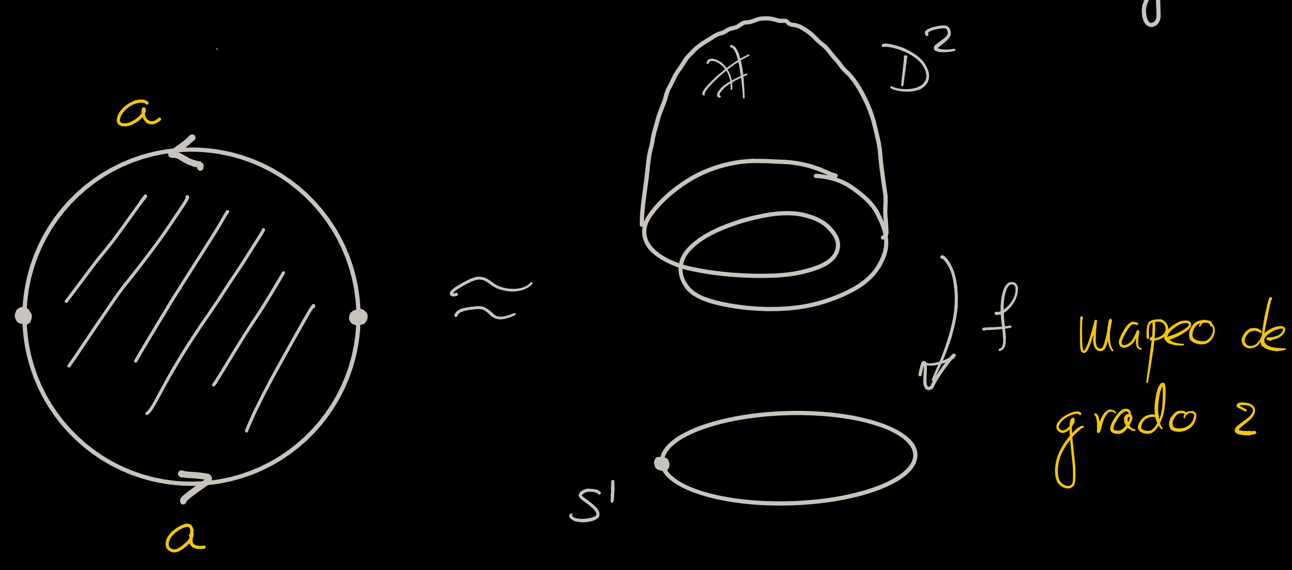
$\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle$

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y) \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "i'_\#"] \arrow[dr, "j'_\#"'] & \\ & \{1\} \end{tikzcd}$$

$$i'_\#(\alpha) = \alpha_f$$

$$\pi_1(Y \cup_f e^2) = \pi_1(Y) \underset{\mathbb{Z}}{*} 1 = \pi_1(Y) / N(\alpha_f). \quad \blacksquare$$

Ejem: $\mathbb{R}P^2 = S^1 \cup_f e^2$, $\quad f: S^1 \to S^1$ mapeo de grado 2



$$f_\# : \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(S^1) \quad \text{i.e.} \quad f_\# : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$$
$$\alpha \longmapsto \alpha_f \qquad\qquad 1 \longmapsto 2$$
generador

$$\Rightarrow \quad \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(S^1) / N(\alpha_f)$$
$$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2$$
generado por lazo a.

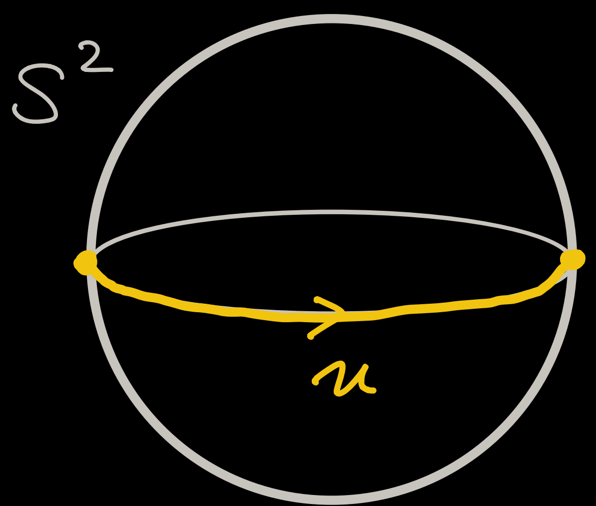
Ejem: De manera más general, $X_k = S^1 \cup_f e^2$
$f: S^1 \to S^1$ mapeo de grado k.

$\therefore \; f_\# : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times k} \mathbb{Z}$ mult. por k

y $\pi_1(X_k) \cong \pi_1(S^1) / N(\alpha_f) \cong \mathbb{Z}/k$.

Regresando al plano proyectivo:

- $\mathbb{RP}^2$ es el cociente de S^2, identificando puntos antipodales.

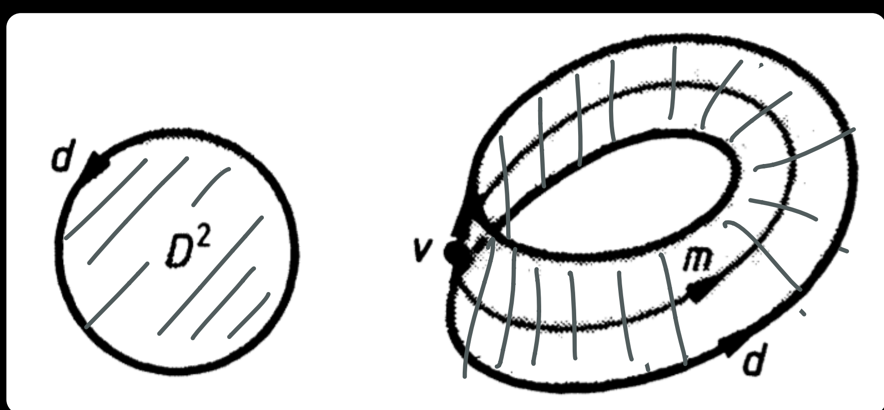


u = semicírculo en el ecuador

En $\mathbb{RP}^2 = S^2/_{x \sim \pm x}$

$[u] \in \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ es un generador.

- $\mathbb{RP}^2$ es la unión de una banda de Möbius y un disco D^2, pegados por sus fronteras.



$[m] \in \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ es un generador $[m]^2 = 1$

$m^2 \simeq v \cdot d \cdot v^{-1}$ pero en $\mathbb{RP}^2$ d es nul-homotópico.

Ejem: Para $n \geq 3$, sea $\mathbb{RP}^n = \mathbb{RP}^2 \cup e^3 \cup \dots \cup e^n$ el espacio proyectivo real de dim. n.

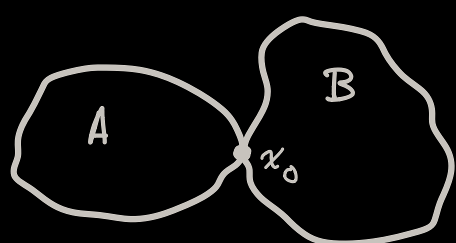
Entonces: $$\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2.$$

Tma: Sea $X = A \cup B$ CW-complejo que es unión de dos subcomplejos arco-conexos A y B tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B$ arco-conexo. Entonces si $x_0 \in A \cap B$

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) \underset{\pi_1(A\cap B, x_0)}{*} \pi_1(B, x_0)$$

Tma: Si $A \vee B$ es la unión en un pto. de dos CW-complejos arco-conexos y $x_0 = A \cap B$, entonces:

$$\pi_1(A \vee B, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0).$$



$A \vee B$

5.5 Grupos Libres y Grafos

- Gpo. libre en n generadores $\quad F[a_1,\dots,a_n] = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n}$

- Gpo. libre generado por un conjunto S $\quad F[S]$ = palabras reducidas en los elems. de S (exponentes en $\mathbb{Z}$)

- Ejems. de gpos. que no son libres:

$$D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = 1 = b^2,\ \ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

gpo. diédrico

Relaciones

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$$

= gpo. abeliano libre de rango 2

Def: Un conjunto de generadores S de un gpo. G es libre ó <u>genera libremente</u> a G si cumple:

Dada una relación $\quad x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k} = 1 \quad$ en G, con $x_i \in S$ y $\varepsilon_i = \pm 1$, $\exists\, j$ tal que

$x_j = x_{j+1} \quad$ y $\quad \varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$.

Tal G es un gpo. libre (libremente) generado por S.

Tma: Sea F un gpo. libre generado por S. Entonces todo elto. $\neq 1$ admite una única expresión de la forma: $x = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ con $x_1, \dots, x_k \in S$,

$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

y $x_i \neq x_{i+1}$.

Tma: Sea $F[S]$ un gpo. libre generado por S y sea H un gpo. arbitrario. Entonces, para toda función $\varphi : S \longrightarrow H$ $\exists !$ homomorfismo de gpos. $\Phi : F[S] \longrightarrow H$ tal que $\Phi|_S = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
F[S] \arrow[dr, dashed, "\exists!\, \Phi \text{ homomorfismo}"] & \\
S \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, phantom, "//"] & H
\end{tikzcd}$$

Def: Si G es un gpo. & $x, y \in G$, entonces el elto. $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ es el conmutador de x & y.

- El subgpo. de G generado por todos los conmutadores $[x,y]$ es el <u>subgpo. conmutador</u> $[G,G]$.
- $[G,G]$ es un subgpo. normal de G ¿Por qué?
- El cociente $G_{ab} = G/[G,G]$ se conoce como la abelianización de G.

Tma: Si F es libre, entonces F_{ab} es un gpo. abeliano libre y

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\text{proy}} & F_{ab} & \cong & \bigoplus_i \mathbb{Z} \\ x_i & \longmapsto & [x_i] & & \\ \text{generadores} & & \text{base} & & \end{array}$$

Tma: Cualesquiera dos conjuntos de generadores libres de un gpo. libre F, tienen la misma cardinalidad.

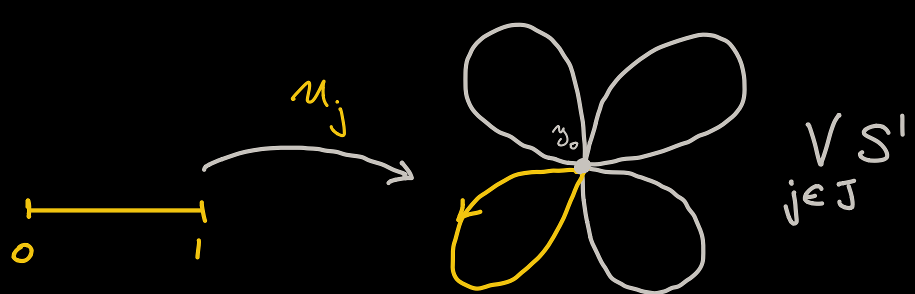
- Esta cardinalidad se llama el <u>rango de F.</u>
- Dos gpos. libres son isomorfos $\Longleftrightarrow$ tienen el mismo rango

Tma: Si $F[S]$ es el gpo. libre generado por S, entonces:

$$F[S] \cong \underset{x \in S}{*} \mathbb{Z}.$$

Tma: Sea $Y = \bigvee_{j \in J} S^1_j$ la unión en un punto y_0 de círculos, tantos como elTos. de J.

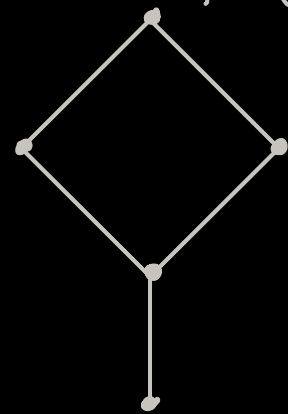
Entonces: $\pi_1(Y, y_0) \cong$ gpo. libre de rango $\#(J)$.

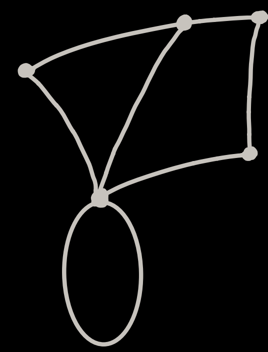


Def: Un grafo es un CW-complejo X, de dim ≤ 1.

X consiste de:

- vértices
- aristas.

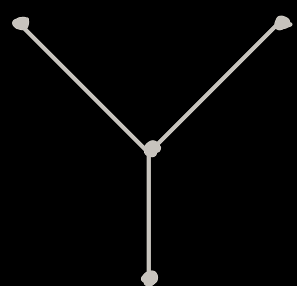




Un <u>árbol</u> es un grafo simplemente conexo.

Un subcomplejo T de un grafo X es un <u>árbol maximal</u> de X si: T es un árbol y contiene todos los vértices de X.

árbol



árbol maximal

Lema: Todo árbol T es contraíble.

Lema: Todo grafo conexo X contiene un árbol maximal.

Obs: Si X es un grafo conexo y $T \subseteq X$ es un árbol maximal entonces:

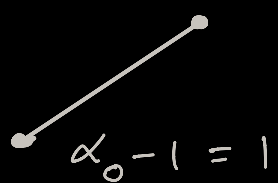
$$X/T \simeq \bigvee_J S^1 \quad \text{y} \quad \therefore \; X \simeq \bigvee_J S^1 .$$

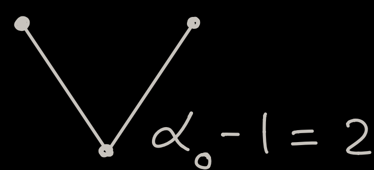
Tma: El gpo. fundamental de un grafo conexo X con: α_0 vértices y α_1 aris-tas es un gpo. libre de rango $1-\alpha_0+\alpha_1$.

Dem:

- Los α_0 vértices de X se pueden unir por medio de α_0-1 aristas (inducción en α_0).

$\alpha_0 = 2$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha_0 = 3$





etc.

y no se pueden unir con menos de α_0-1 aristas.

- Si los vértices se unen por α_0-1 aristas éstas forman un árbol maximal $T \subseteq X$

- Claramente: $X/T \approx \bigvee_{\alpha_1-(\alpha_0-1)} S^1$

$$X \simeq X/T \Rightarrow \pi_1(X) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{1-\alpha_0+\alpha_1} \qquad \blacksquare$$