5.6 Presentaciones de Grupos

Dos ejemplos:

- Gpo. diédrico:

$$D_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1 = b^2,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$
$$= \langle a, b \mid a^4 = b^2 = bab^{-1}a = 1 \rangle.$$

- Gpo. de cuaternión de orden 8:

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$
$$\cong \langle a, b \mid a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$
$$= \langle a, b \mid a^4 = a^2 b^{-2} = bab^{-1}a = 1 \rangle.$$

Def: Sean: $S \neq \emptyset$ un conjunto (generadores)

$F[S]$ = gpo. libre generado por S

$R \subseteq F[S]$ (relaciones)

Denotamos por $\langle S \mid R \rangle$ al grupo cociente:

$$\langle S \mid R \rangle = F[S] / N(R) \quad \text{donde:}$$

$N(R)$ es el subgpo. normal de $F[S]$ generado por R.

$$\langle S \mid R \rangle = \langle s, s', \dots \mid r(s, s', \dots),\ r'(s, s', \dots), \dots \rangle$$

palabras en los elementos de S

Def: Sea G un grupo. Una pareja S, R es una presentación de G si: $G \cong \langle S \mid R \rangle$.

Ejemplos y Observaciones:

a). $R = \emptyset \Rightarrow N(R) = 1$

Entonces: $\langle S \mid \emptyset \rangle = F[S]$

Notación: $\langle S \mid \emptyset \rangle = \langle S \mid - \rangle = \langle S \rangle$.

$S = \{s\} \Rightarrow \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$.

$S = \{s_1, \dots, s_n\} \Rightarrow \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n}$

b). $\langle a \mid a^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n$.

c). Todo gpo. G tiene una presentación.

Sea $S \subseteq G$ un conjunto de generadores y $\Phi : F[S] \longrightarrow G$ el homomorfismo natural

$s \longmapsto s$

- Φ es epimorfismo (S genera a G).
- $\ker \Phi$ es subgpo. normal de $F[S]$

$$\text{y} \quad F[S]/\ker\Phi \cong G$$

Sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow \ker\Phi \xrightarrow{i} F[S] \xrightarrow{\Phi} G \longrightarrow 1$$

- Sea $R \subseteq S$ tal que $N(R) = \ker\Phi$. Entonces:

$$\langle S \mid R \rangle = F[S]/N(R) = F[S]/\ker\Phi \cong G.$$

d). Sea $G = \langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ presentación donde $r_j = r_j(s_1, \dots, s_m)$ palabra en $s_1, \dots, s_m$.

Sea H un gpo. arbitrario y $h_1, \dots, h_m \in H$ tal que:
$$r_j(h_1, \dots, h_m) = 1 \quad \forall j.$$

Entonces $\exists!$ homomorfismo
$$f : G \longrightarrow H, \quad s_i \longmapsto h_i \quad \forall i$$

$$\begin{tikzcd}
F[S] \arrow[rr] \arrow[d] & \arrow[d, phantom, "//"] & H \\
G \cong F[S]/N(R) \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

e). En el gpo. libre $F = \langle s_1, \ldots, s_m \mid - \rangle$ el subgpo. conmutador $[F, F]$ está generado (libremente) por todos los conmutadores

$$[s_i, s_j] = s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}, \quad i \neq j$$

$$\therefore \quad F_{ab} = F/_{[F,F]} = \langle s_1, \ldots, s_m \mid [s_i, s_j] \ \forall i \neq j \rangle$$

es una presentación para $\mathbb{Z}^m$ (gpo. abeliano libre rango m)

f) Si $G = \langle s_1, \ldots, s_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$ entonces

$$G_{ab} = \langle s_1, \ldots, s_m \mid r_1, \ldots, r_n, [s_i, s_j] \ \forall i \neq j \rangle$$

g) Si $G = \langle S \mid R \rangle$ y $G' = \langle S' \mid R' \rangle$ con $S \cap S' = \emptyset$, entonces:

$$G * G' = \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle .$$

Problema de la palabra: Dado $G = \langle S \mid R \rangle$

- Determinar si dos palabras w & w' representan el mismo elemento de G.

Equivalentemente:

- Determinar si una palabra w representa el elemento identidad.

Ejercicio: Sean

$$G_1 = \langle s, t \mid s^5 (st)^{-2},\ t^3 (st)^{-2} \rangle$$

$$G_2 = \langle s, t \mid s^3 (st)^2,\ t^5 (st)^2 t^{-5} s^{-1} (st)^{-3} \rangle$$

Probar que $(G_1)_{ab} \cong (G_2)_{ab} \cong 1$.

De hecho:

$G_1 \cong$ gpo. icosaédrico binario $\left(\begin{array}{l}\text{no abeliano} \\ 120 \text{ elementos.}\end{array}\right)$

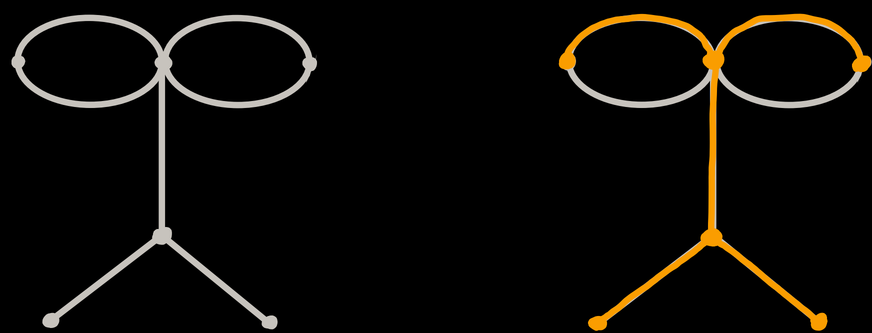
$G_2 \cong$ gpo. trivial.

De regreso a topología:

Sea X un CW-complejo conexo c/pto. base $x_0 \in X$

$X^1 = 1\text{-esqueleto} \simeq \vee S^1$

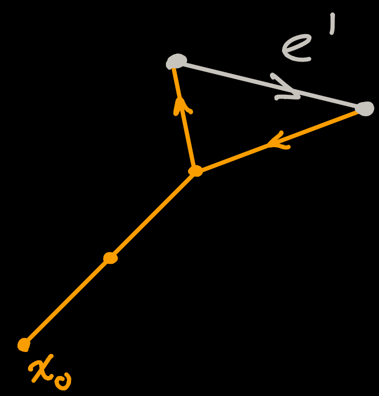
T = árbol maximal de X^1.



1-esqueleto X^1 árbol maximal T

Para toda 1-celda $e^1 \subseteq X^1 \setminus T$ construimos un elemento

$$s(e^1) \in \pi_1(X^1, x_0)$$



Más aún, $\forall$ 2-celda $e^2 \subseteq X$ definimos un elto. $r(e^2) \in \pi_1(X^1, x_0)$ dado por el mapeo de pegado $u: S^1 \longrightarrow X^1$ y una trayectoria $v: I \to T$, de x_0 a $x_1 = u(1)$:

$$r(e^2) = [v] \cdot [u] \cdot [v^{-1}]$$

Tma: Sea X un CW-complejo con árbol maximal T. Entonces el gpo. fundamental $\pi_1(X, x_0)$ tiene la presentación:

$$\langle s(e^1), \dots \mid r(e^2), \dots \rangle$$

donde e^1 corre sobre las 1-celdas en $X^1 \setminus T$ y e^2 corre sobre las 2-celdas de X.

Ejems:

a). Si X no tiene 1-celdas, $\pi_1(X) = 1$.

Si X no tiene 2-celdas, $\pi_1(X)$ es libre.

Si X tiene un núm. finito de 1-celdas, $\pi_1(X)$ es finitamente generado.

Si X tiene un núm. finito de 1-celdas y un núm. finito de 2-celdas entonces $\pi_1(X)$ es finitamente presentado.

b) Para $n \geq 1$, sea $Y_n = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n}$, pto. base x_0.

entonces: $\pi_1(Y_n, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.

Sean $f_1, \dots, f_m : S^1 \to Y_n$ mapeos tales que $f_j(1) = x_0$.

$$f_{j\#} : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \pi_1(Y_n, x_0)$$
$$\underset{\text{generador}}{\sigma} \longmapsto f_{j\#}(\sigma)$$

Sea $X = Y_n \cup e_1^2 \cup \dots \cup e_m^2$ donde e_j^2 está pegada por f_j. Entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid f_{1\#}(\sigma), \dots, f_{m\#}(\sigma) \rangle.$$

c) Si en (b) tomamos

$$r_1, \dots, r_m \in \pi_1(Y_n, x_0) = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$$

palabras arbitrarias, entonces podemos elegir $f_j : S^1 \to Y_n$ tales que $f_{j\#}(\sigma) = r_j$. Entonces:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

Es decir: Para todo gpo. G finitamente presentado $\exists$ un CW-complejo X de dim. 2 tal que $\pi_1(X) \cong G$.

Tma (Seifert-Van Kampen)

Sea $X = A \cup B$ un CW-complejo, que es unión de dos subcomplejos A y B, tales que A, B y $A \cap B$ son arco-conexos.

Supongamos que tenemos presentaciones:

$$\pi_1(A, x_0) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$$

$$\pi_1(B, x_0) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_k \mid q_1, \dots, q_\ell \rangle$$

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ generadores de $\pi_1(A \cap B, x_0)$

$$i' : A \cap B \longrightarrow A$$

$$j' : A \cap B \longrightarrow B$$

las inclusiones

&

$$i'_\#(\gamma_j) = v_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

$$j'_\#(\gamma_j) = w_j(\beta_1, \dots, \beta_k).$$

Entonces, $\pi_1(X, x_0)$ tiene la sig. presentación:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k \mid r_1, \dots, r_n, q_1, \dots, q_\ell, v_j \cdot w_j^{-1} \ \forall j \rangle$$