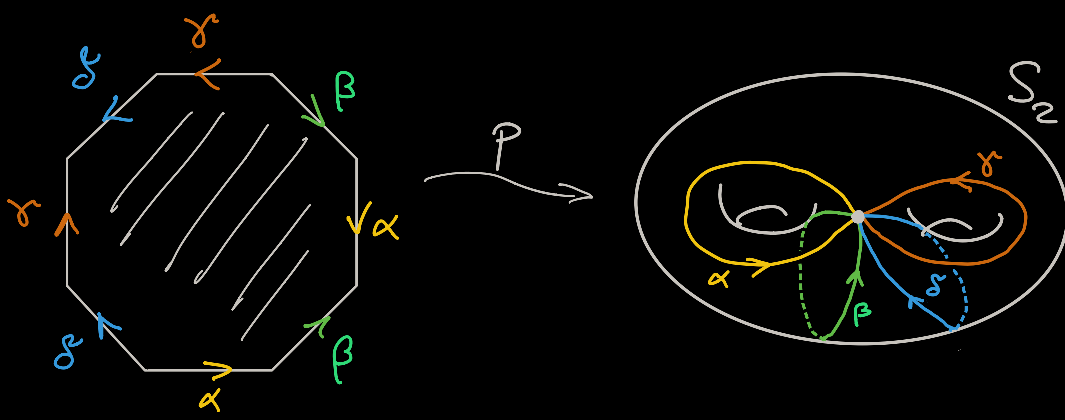
5.7. Ejemplos de Gpos. Fundamentales.

Tma: Si $S_g = \#_{i=1}^{g} T^2$, entonces:

$$\pi_1(S_g) \cong \left\langle \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g \;\middle|\; \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] \right\rangle$$

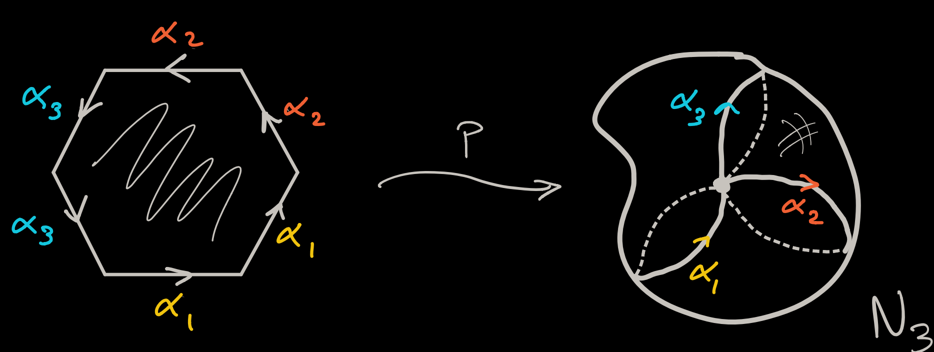
$g = 2$



$$S_g = e^0 \cup \bigcup_{i=1}^{g} (e^1_{\alpha_i} \cup e^1_{\beta_i}) \cup e^2$$

Tma: Si $N_g = \#_{i=1}^{g} \mathbb{RP}^2$, entonces:

$$\pi_1(N_g) \cong \left\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g \;\middle|\; \alpha_1^2 \ldots \alpha_g^2 \right\rangle$$



$$N_g = e^0 \cup (e^1_{\alpha_1} \cup \ldots \cup e^1_{\alpha_g}) \cup e^2$$

Tma: Todas las superficies $S_0, S_1, S_2, \ldots$
$N_1, N_2, \ldots$
tienen distintos tipos de homotopía (en particular, no son homeomorfas).

Dem: $\pi_1(S_g)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ (gpo. abeliano libre de rango $2g$)

$$\pi_1(N_g)_{ab} \cong \mathbb{Z}^g / \langle (2,2,\ldots,2) \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}^{g-1}$$

subgpo. generado por elto. $(2,2,\ldots,2)$

Sea $\varphi: \mathbb{Z}^g \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}^{g-1}$ epimorfismo

$$(m_1,\ldots,m_g) \longmapsto ([m_1], m_2-m_1, \ldots, m_g-m_1)$$

clase mod 2

$$\ker\varphi = \left\{ (m_1,\ldots,m_g) \in \mathbb{Z}^g \;\middle|\; \begin{array}{l} m_1 \text{ es par} \\ m_i = m_1 \quad \forall i=2,\ldots,g \end{array} \right\}$$

$$= \{ (m,\ldots,m) \in \mathbb{Z}^g \mid m \text{ par} \}$$

$$= \langle (2,\ldots,2) \rangle$$

1er Tma. isomorfismo: $\mathbb{Z}^g/\ker\varphi = \mathbb{Z}^g / \langle (2,\ldots,2) \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}^{g-1}$.

De manera equivalente:

Si $e_1, \dots, e_g \in \mathbb{Z}^g$ es la base canónica

entonces: $(2,2,\dots,2) = 2(e_1 + e_2 + \dots + e_g)$

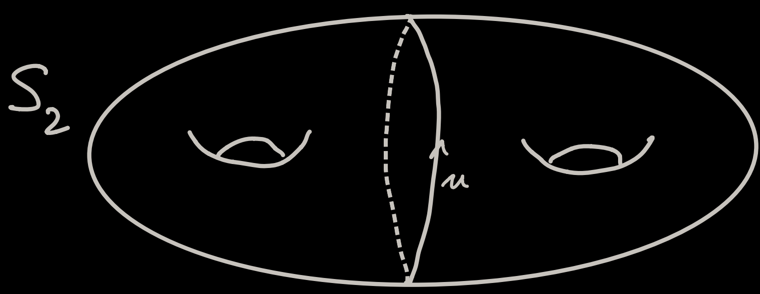
Consideramos una nueva base para $\mathbb{Z}^g$

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + \dots + e_g \\ e_2 \\ \vdots \\ e_g \end{cases}$$

$$\mathbb{Z}^g \cong \mathbb{Z}_{(e_1 + \dots + e_g)} \oplus \mathbb{Z}_{e_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{e_g}$$

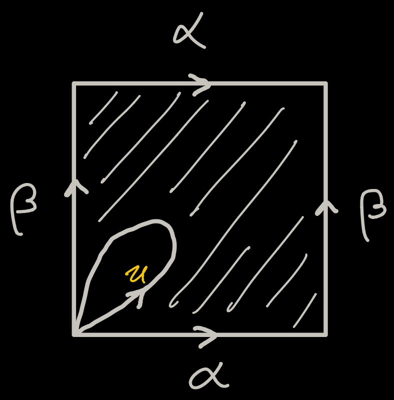
$$\therefore \; \mathbb{Z}^g / 2(e_1 + \dots + e_g) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}^{g-1}.$$

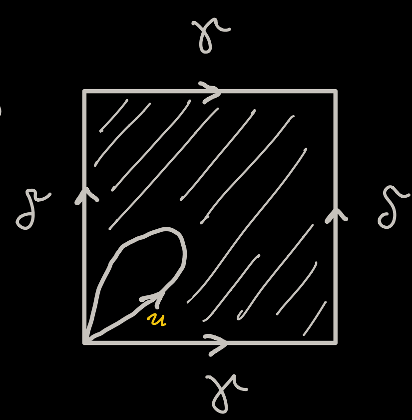
Ejem:



$$A \cap B \simeq S^1$$

$$\pi_1(A \cap B) = \mathbb{Z} = \langle u \rangle$$

A 

B 

$$\pi_1(S_2) = \pi_1(A) \underset{\pi_1(A\cap B)}{*} \pi_1(B)$$

$$= \langle \alpha, \beta \rangle \underset{\langle u \rangle}{*} \langle \gamma, \delta \rangle$$

$u \longmapsto \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$

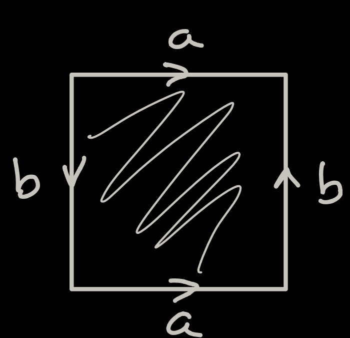
$u \longmapsto \gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$

$$= \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} \rangle$$

Ejem: $N_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = K$ botella de Klein.

$$\pi_1(N_2) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^2 = 1 \rangle$$

$\cong$ Ejercicio

K 

$$\therefore \quad \pi_1(K) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$$

$$= \langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle$$

Ejercicio: Sea $L(p,q)$ el espacio lente de tipo (p,q).

Probar que $L(p,q) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$

tal que el 2-esqueleto de $L(p,q)$ es

$$X_p = S^1 \cup_p e^2$$

2-celda pegada por un mapeo de grado p

$$\therefore \quad \pi_1 L(p,q) \cong \mathbb{Z}/p.$$

Recordemos:

$$S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$$

$$C_p = \{ z \in S^1 \mid z^p = 1 \} \cong \mathbb{Z}/p$$

C_p actúa en S^3:

$$(z_1, z_2) \longmapsto (e^{2\pi i/p} \cdot z_1, \, e^{2\pi i q/p} \cdot z_2) \quad \text{generador}$$

ó en general: $z \cdot (z_1, z_2) = (z \cdot z_1, z^q \cdot z_2)$

y $\quad L(p,q) = S^3 / C_p$.

Obs: La proyección canónica $S^3 \longrightarrow S^3/C_p$ es un recubrimiento. Ver Jänich, Cap. 9.

Def: Un nudo $K \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio homeomorfo a S^1.

K

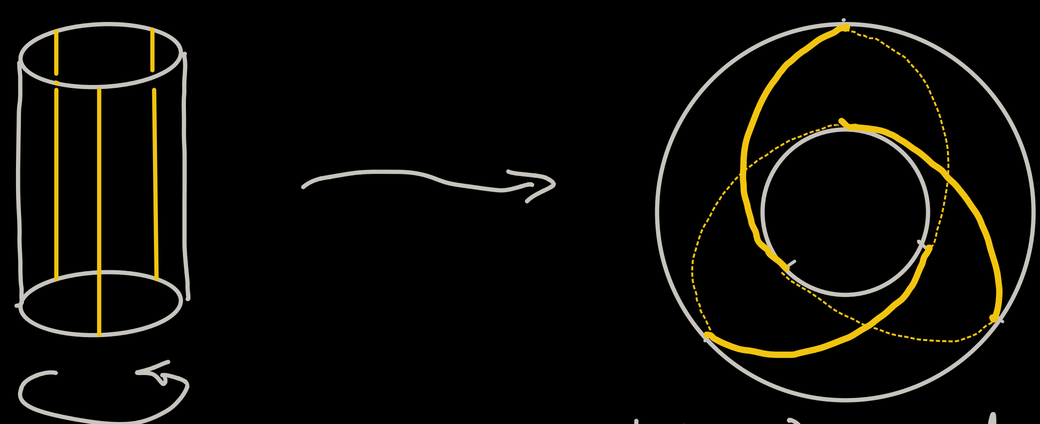
nudo "en forma de 8"

- K y K' son equivalentes si $\mathbb{R}^3 \setminus K \approx \mathbb{R}^3 \setminus K'$.
- El gpo. de un nudo K es: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

Si K es un nudo, representado por su proyección en $\mathbb{R}^2$ por medio de arcos y cruces, $\exists$ un algoritmo para obtener una presentación del grupo de K.

Ver Kosniowski, Caps. 27 y 28.

Ejem: Nudos tóricos $t(p,q)$, m.c.d.$(p,q)=1$

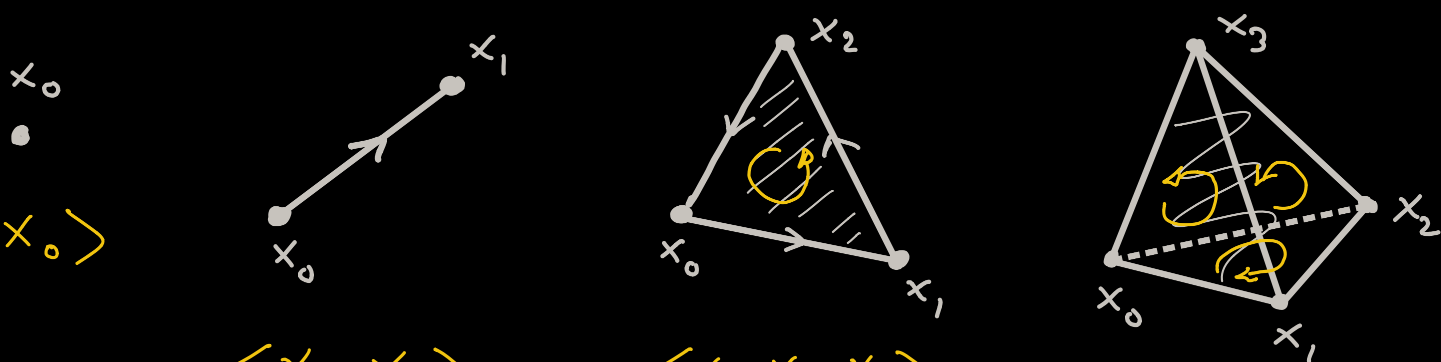


$\frac{2}{3}(2\pi i)$ $t(2,3)$ nudo trebol

Gpo. del nudo: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus t(p,q)) = \langle s,t \mid s^p = t^q \rangle$.

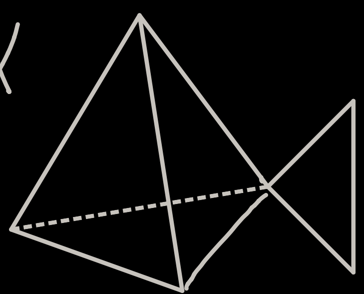
Siguiente tema: Homología Simplicial

Simplejos de dim. n:



$\langle x_0 \rangle$ $\quad$ $\langle x_0, x_1 \rangle$ $\quad$ $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ $\quad$ $\langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$

X



complejo simplicial

$H_0(X)$

$H_1(X)$

$H_2(X)$

$\vdots$

grupos de homología de X

(grupos abelianos)

Leer:

- J. B. Fraleigh; Abstract Algebra (Groups in Topology)
- J. R. Munkres; Algebraic Topology (Capítulo 1)