Grupos de Homología

K = complejo simplicial

- $C_q(K)$ = gpo. abeliano libre generado por los q-simplejos (orientados) de K.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0$$

Frontera:

$$\partial \langle x_0, \ldots, x_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q \rangle$$

- $Z_q(K) = \ker \partial_q$ q-ciclos de K.
- $B_q(K) = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ q-fronteras de K.

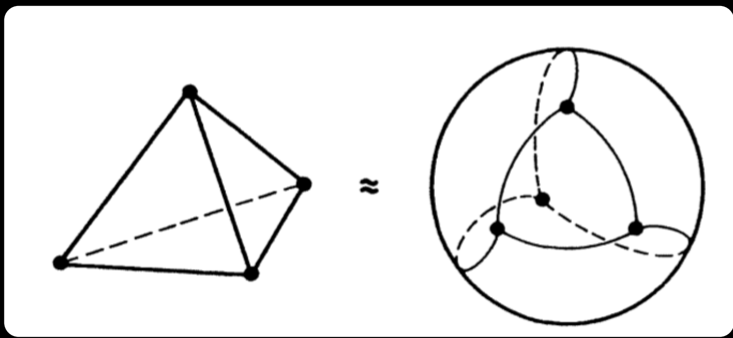
Lema: $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0 \Rightarrow B_q(K) \leq Z_q(K)$.

Def: q-ésimo grupo de homología de K

$$H_q(K) := Z_q(K) \big/ B_q(K)$$

Elementos se llaman: clases de homología $\{z\}$, con $z \in Z_q(K)$.

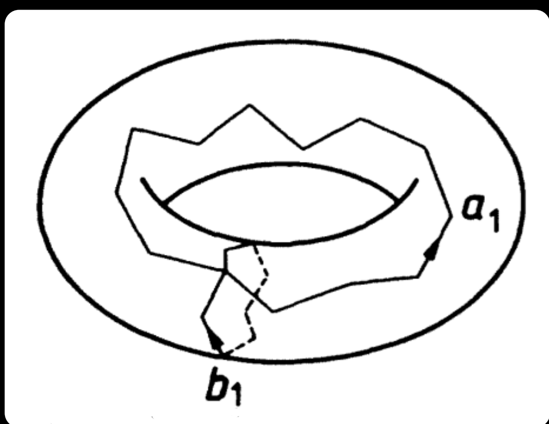
Ejem: $|K| \approx S^2$



$$H_q(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q=1 \\ \mathbb{Z} & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases}$$

(Ejercicio)

Ejem: $|K| \approx T = S^1 \times S^1$



$$H_q(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z}^2 & q=1 \\ \mathbb{Z} & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases}$$

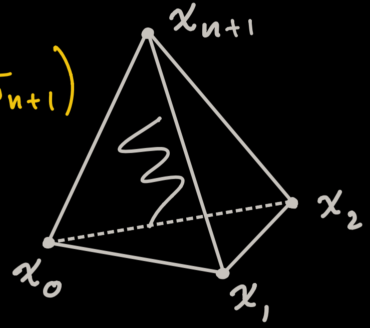
Ejems: S_g = sup. compacta, orientable, género g

N_h = sup. " , no orientable, genero h.

$$H_q(S_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & q=1 \\ \mathbb{Z} & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases} \qquad H_q(N_h) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2 & q=1 \\ 0 & q=2 \\ 0 & q\geq 3 \end{cases}$$

Ejem: Sea $K(\sigma_{n+1})$ el conjunto de todas las caras de un $(n+1)$-simplejo σ_{n+1}

$K(\sigma_{n+1})$



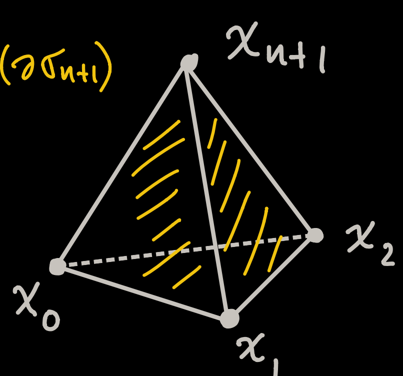
$$H_q(K(\sigma_{n+1})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q\neq 0 \end{cases}$$

Estos gpos. de homología son los mismos para cualquier cono. (Tmas. 7.27 y 7.2.8)

Ejem: Sea $K(\partial\sigma_{n+1})$ el conjunto de todas las caras propias de un $(n+1)$-simplejo σ_{n+1}

Entonces: $|K(\partial\sigma_{n+1})| \approx S^n$ y

$K(\partial\sigma_{n+1})$



$$H_q(K(\partial\sigma_{n+1})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q=1,\dots,n-1 \\ \mathbb{Z} & q=n \\ 0 & q\geq n+1 \end{cases}$$

generado por el n-ciclo:

$$z_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \langle x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{n+1}\rangle$$

Ver Tma. 7.2.9.

Obs: • $H_q(K)$ no depende de la triangulación.

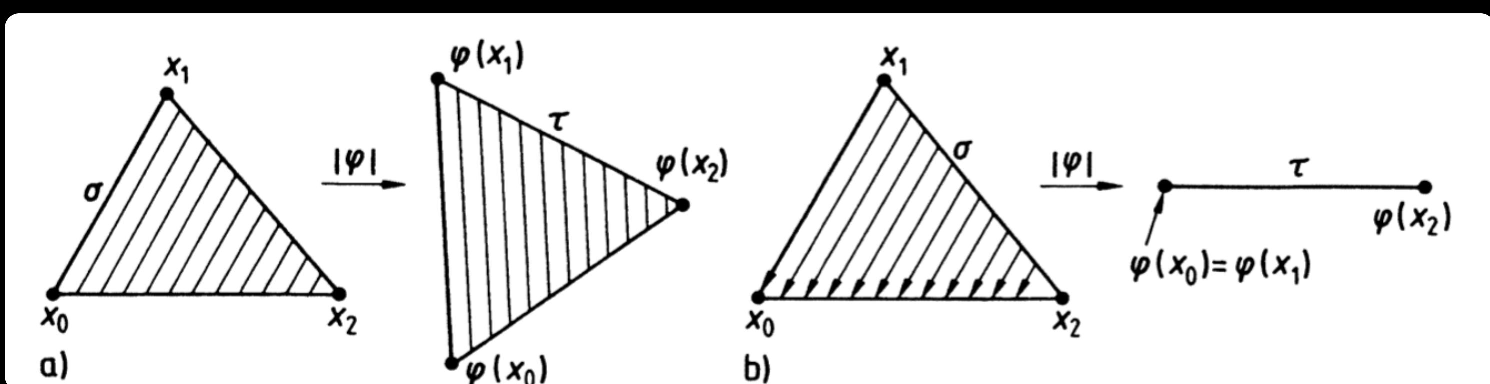
• $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^r$, donde $r = \#$ comp. conexas de K.

7.3 Mapeos simpliciales y Homomorfismos Inducidos en Homología.

Def: Una función $\varphi : K \longrightarrow L$ entre complejos simpliciales es un mapeo simplicial si

i) φ manda vértices de K en vértices de L.

ii) Si $x_0, \dots, x_q$ son vértices de $\sigma \in K$, entonces los vértices $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q) \in L$ generan el simplejo $\varphi(\sigma) \in L$.



Tma:

a). Un mapeo simplicial $\varphi: K \to L$ está determinado por las imágenes de los vértices de K.

b). $\sigma \leq \tau$ en $K \Rightarrow \varphi(\sigma) \leq \varphi(\tau)$ en L.

c). $\forall \sigma \in K$, $\dim \varphi(\sigma) \leq \dim \sigma$.

d). φ induce una función continua $|\varphi|: |K| \to |L|$.

Def: Un mapeo simplicial biyectivo $\varphi: K \to L$ es un isomorfismo de complejos simpliciales

Tma:

a). Si $\varphi: K \to L$ es simplicial y biyectivo, entonces $\varphi^{-1}: L \to K$ es simplicial.

b). Si $\varphi: K \to L$ es isomorfismo, entonces $|\varphi|: |K| \to |L|$ es homeomorfismo.

Dado un mapeo simplicial $\varphi: K \to L$ y $q \geq 0$, definimos un homomorfismo:

$$C_q(\varphi) : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$$

Si $\sigma_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$ q-simplejo de K

$$C_q(\varphi)(\sigma_q) = \begin{cases} \langle \varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q) \rangle & \text{si } \varphi(x_i) \neq \varphi(x_j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tma: $\forall q \geq 0$, $\partial_q \circ C_q(\varphi) = C_{q-1}(\varphi) \circ \partial_q$ i.e. el sig. diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & \vdots \arrow[d] \\
C_q(K) \arrow[r, "C_q(\varphi)"] \arrow[d, "\partial_q"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & C_q(L) \arrow[d, "\partial_q"] \\
C_{q-1}(K) \arrow[r, "C_{q-1}(\varphi)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & C_{q-1}(L) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $C_q(\varphi)$ manda ciclos en ciclos

y fronteras en fronteras.

Dem:

$$\begin{tikzcd}
\langle x_0, \dots, x_q \rangle \arrow[r, mapsto, "C_q(\varphi)"] \arrow[d, mapsto, "\partial_q"'] & \langle \varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q) \rangle \arrow[d, mapsto, "\partial_q"] \\
\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle \arrow[r, mapsto, "C_{q-1}(\varphi)"] & \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle \varphi(x_0), \dots, \widehat{\varphi(x_i)}, \dots, \varphi(x_q) \rangle
\end{tikzcd}$$

¿Qué pasa si $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$?

$\blacksquare$

Notemos:

$$\begin{tikzcd}
C_q(K) \arrow[r, "C_q(\varphi)"] & C_q(L) \\
Z_q(K) \arrow[r] \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & Z_q(L) \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
B_q(K) \arrow[r] \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & B_q(L) \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

$C_q(\varphi)$ induce un homomorfismo:

$$\begin{aligned}
Z_q(K)/B_q(K) &\longrightarrow Z_q(L)/B_q(L) \\
\{z\} &\longmapsto \{C_q(\varphi)(z)\}
\end{aligned}$$

Def: (Homomorfismo inducido)

Si $\varphi : K \to L$ mapeo simplicial, definimos:

$$H_q(\varphi) : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$$
$$\{z\} \longmapsto \{C_q(\varphi)(z)\}$$

Notación: $\varphi_{\bullet} = C_q(\varphi) : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$

$$\varphi_{*} = H_q(\varphi) : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$$

Prop:

a). Si $\varphi : K \longrightarrow K$ es la identidad, entonces

$$\varphi_{\bullet} : C_q(K) \longrightarrow C_q(K)$$
$$\varphi_{*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(K)$$

son las identidades de los gpos. respectivos.

b). Si $\varphi : K \to L$, $\psi : L \to M$ mapeos simpliciales, entonces:

$$(\psi \circ \varphi)_{\bullet} = \psi_{\bullet} \circ \varphi_{\bullet} : C_q(K) \longrightarrow C_q(M)$$
$$(\psi \circ \varphi)_{*} = \psi_{*} \circ \varphi_{*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(M)$$

c). Si $\varphi: K \to L$ isomorfismo de comp. simpliciales entonces:

$$\varphi_\circ : C_q(K) \xrightarrow{\cong} C_q(L)$$
$$\varphi_* : H_q(K) \xrightarrow{\cong} H_q(L)$$

son isomorfismos de grupos.

d). Si $\varphi: K \to L$ mapeo simplicial, K y L conexos, entonces:

$$\varphi_* : H_0(K) \xrightarrow{\cong} H_0(L)$$

es un isomorfismo.

e). Si $\varphi: K \to L$ mapeo simplicial constante, entonces:

$$\varphi_* = 0 : H_q(K) \to H_q(L)$$

es el homomorfismo trivial $\forall\, q \geq 1$.