Cap. 8 Introducción al Álgebra Homológica

8.1 Grupos Abelianos

- Cociente: Si $H \leq G$, $\forall g \in G$: $\bar{g} = g + H$

$G/H = \{ \bar{g} \mid g \in G \}$ $\qquad \bar{g}_1 = \bar{g}_2 \iff g_1 - g_2 \in H$

Operación:

$$\bar{g}_1 + \bar{g}_2 = \overline{g_1 + g_2}$$

Proy. canónica:

$$G \longrightarrow G/H$$
$$g \longmapsto \bar{g}$$

- Sean $H \leq G$, $H' \leq G'$ y $f: G \to G'$ homomorfismo tal que $f(H) \leq H'$. Entonces:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & G/H \arrow[d, dashed, "\exists \bar{f}"] \\ H' \arrow[r] & G' \arrow[r] & G'/H' \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} \bar{g} \\ \downarrow \\ \overline{f(g)} \end{array} \quad \text{hom.}$$

- Si $f: G \to H$ homomorfismo,

$\ker(f) = \{ g \in G \mid f(g) = 0 \}$

$\operatorname{im}(f) = f(G) \leq H$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & \operatorname{im}(f) \\ G/\ker(f) \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"', "\cong"] & \end{tikzcd}$$

• Producto directo: $\prod_j G_j = \{ (g_j) \mid g_j \in G_j \}$

• Suma directa: $\bigoplus_j G_j = \{ (g_j) \in \prod_j G_j \mid g_j = 0 \;\cancel{\forall} j \}$

J numerable: $G_1 \times G_2 \times \dots \neq G_1 \oplus G_2 \oplus \dots$

J finito: $G_1 \times \dots \times G_n = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$.

Ejemplos:

a). $0 =$ gpo. trivial, $\mathbb{Z} =$ gpo. de los enteros
$\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (n sumandos)

b). Para $n \in \mathbb{N}$, $nG = \{ ng \mid g \in G \}$ subgpo. de G

Los subgpos. de $\mathbb{Z}$ son: $0, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \dots$

c). $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1} \}$ gpo. cíclico de orden n

* $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ es un generador $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{mcd}(x, n) = 1$.

* Si $k \mid n$ entonces $\frac{n}{k}\mathbb{Z}_n$ subgpo. de $\mathbb{Z}_n$, orden k.
y estos son todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_n$.

d) $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ gpos. abelianos finitos.

Si $\operatorname{mcd}(m,n)=1$, $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

$$\bar{x} \longmapsto ([x]_m, [x]_n)$$

clase módulo m clase módulo n

Vgr. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$

$$\cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_6 .$$

e) $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ gpo. abeliano finitamente generado

f) Para $g \in G$, $\langle g \rangle = \{ ng \mid n \in \mathbb{Z} \}$ subgpo. generado por g

Si $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$, g tiene orden infinito.

Si $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_n$, g tiene orden n.

g). $\operatorname{Tor}(G) = \{ g \in G \mid g \text{ de orden finito} \}$ subgpo. de torsión de G

- Todo homomorfismo $f : G \to G'$ manda $\operatorname{Tor}(G)$ en $\operatorname{Tor}(G')$.
- Si $\operatorname{Tor}(G) = 0$, G es libre de torsión.
- Si $\operatorname{Tor}(G) = G$, G es un grupo de torsión.

Obs: Si $G_j \subseteq G$ subgpos. $\forall j \in G$, denotamos $\sum_j G_j$ al subgpo. de las sumas finitas de la forma $\sum_j g_j$ con $g_j \in G_j$.

Si $\sum_j G_j = G$ y $G_i \cap \left(\sum_{i \neq j} G_j \right) = 0 \quad \forall i \in J$ entonces se tiene un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \bigoplus_j G_j &\xrightarrow{\cong} \sum_j G_j = G \\ (g_j) &\longmapsto \sum_j g_j \end{aligned}$$

En tal caso, se dice que G es suma directa interna de los subgrupos G_j.

Def: Un subconjunto $\mathcal{B} \subset G$ es una base para G si se cumple alguna de las sigs. (equivalentes):

a). Todo $b \in \mathcal{B}$ tiene orden infinito y G es la suma directa interna de los $\langle b \rangle$ con $b \in \mathcal{B}$.

b). Todo $0 \neq g \in G$ admite una unica representación $g = \sum n_b \cdot b$ (suma finita), $n_b \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathcal{B}$.

c). $\mathcal{B}$ genera a G y es linealmente independiente.

- Un gpo. abeliano que posee una base $\mathcal{B}$, se llama grupo abeliano libre.
- La cardinalidad de $\mathcal{B}$ es el rango de G.

Tma:

① Dos gpos. abelianos libres son isomorfos si y solo si ambos tienen el mismo rango.

② Si G es abeliano libre y $G' \subseteq G$ es un subgrupo, entonces G' es abeliano libre y $rg(G') \leq rg(G)$.

③ Si $f: G \to H$ homomorfismo de gpos. abelianos libres de rango finito, entonces:

$$rg(\ker f) + rg(\operatorname{im} f) = rg(G).$$

Def: Para un conjunto $X \neq \emptyset$ definimos

$$F(X) = \{ f: X \to \mathbb{Z} \mid f(x) = 0 \ \forall \ x \in X \}$$

- $F(X)$ es un gpo. abeliano con la suma de funciones.
- Si $f_x : X \to \mathbb{Z}$ es la función $f_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$, entonces $\mathcal{B} = \{f_x\}_{x \in X}$ es una base para $F(X)$.
- $F(X)$ es el gpo. abeliano libre generado por X.

Obs: Los eltos. de $F(X)$ son de la forma $\sum_x n_x \cdot f_x$ (sumas finitas) con $n_x \in \mathbb{Z}$ y suelen abreviarse por: $\sum_x n_x \cdot x$.

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces

$$F(X) = F(x_1, \dots, x_n) = \{k_1 x_1 + \dots + k_n x_n \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$$
$$\cong \mathbb{Z}^n.$$

Tma: (Fundamental de Gpos. Abelianos F.G.)
Si G es un gpo. abeliano fin. gen., entonces $\exists$ eltos. $y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_p \in G$ tales que:

a). G es la suma directa interna de los subgrupos cíclicos generados por estos elementos.

b). Los órdenes $t_1, \dots, t_r$ de $y_1, \dots, y_r$ son enteros ≥ 2 y satisfacen $t_1 | t_2 | \dots | t_r$.

c). Los $z_1, \dots, z_p$ tienen orden infinito.

d). $\nexists$ un sistema de generadores de G con menos de $r+p$ elementos. Más aún, los núms. $p \geq 0$ y $t_1, \dots, t_r$ están unívocamente determinados por G.

$$\therefore \quad G \cong \mathbb{Z}^p \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{t_r}.$$

$p =$ núm. de Betti, $\quad t_1, \dots, t_r =$ coefs. de torsión.

8.2. Sucesiones Exactas

Def: Una sucesión de gpos. abelianos y homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{f_{q+2}} A_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} A_q \xrightarrow{f_q} A_{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \cdots$$

puede ser finita ó infinita

es exacta si $\operatorname{im}(f_{q+1}) = \ker(f_q)$ $\forall q$.

Ejemplos:

a). $0 \to A \xrightarrow{f} B$ es exacta $\Longleftrightarrow$ f es mono (inyectiva).

b). $B \xrightarrow{g} C \to 0$ es exacta $\Longleftrightarrow$ g es epi (sobre).

c). $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ es exacta $\Longleftrightarrow$ f es isomorfismo.

d). $0 \to A \to 0$ es exacta $\Longleftrightarrow$ $A = 0$.

e). Si A y C son gpos. abelianos, entonces la suc.

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{j} C \to 0$$

es exacta, donde $i(a) = (a,0)$ y $j(a,c) = c$.

f). Si $m \geq 1$, la suc. $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_m \to 0$ es exacta.

Lema del quinto: Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"', "\cong"] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"', "\cong"] & A_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"', "\cong"] & A_5 \arrow[d, "f_5"', "\cong"] \\
B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r, "\psi_3"] & B_4 \arrow[r, "\psi_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

de gpos. abelianos y homomorfismos, cuyas filas son sucesiones exactas; si f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, entonces f_3 es isomorfismo.

Def: Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se llama <u>sucesión exacta corta</u> (SEC).

Decimos que esta S.E.C. <u>se escinde</u> si se cumple cualquiera de las sigs. (equivalentes):

a). Existe un isomorfismo $\varphi: A \oplus C \longrightarrow B$ tal que: $f(a) = \varphi(a,0)$ y $g\varphi(a,c) = c$.

b). $\exists$ un homomorfismo $r: C \to B$ tal que $g \circ r = id_C$.

c). $\exists$ un homomorfismo $\ell: B \to A$ tal que $\ell \circ f = id_A$.

Por ejem. condición b):

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0, \qquad r \circ g = id_C.$$

$\exists\, r$

$\varphi : A \oplus C \longrightarrow B$

$(a,c) \longmapsto f(a) + r(c)$

Ejems:

1. Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ se escinde, entonces $B \cong A \oplus C$.

2. La SEC $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$ no se escinde para $m \geq 2$, pues $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m$.

3. Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es exacta y A, C son f.g. entonces B es f.g.
(consideremos las imágenes de generadores de A e imágenes inversas fijas de generadores de C)

Tma: Toda SEC $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ tal que C es gpo. abeliano libre, se escinde.

Dem: Usar una base de C para construir un homomorfismo $r : C \to B$ tal que $g \circ r = id_C$. $\square$