8.3 Complejos de Cadenas

Def: Un complejo de cadenas es una sucesión $C = \{C_q, \partial_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ de gpos. abelianos y homomorfismos:

$$C: \quad \cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots$$

tal que $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}$.

- $Z_q(C) = \ker \partial_q$ ciclos en dim. q
- $B_q(C) = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ fronteras en dim. q
- $H_q(C) := Z_q(C)/B_q(C)$ q-ésimo grupo de homología de C

Si $z \in Z_q(C)$, $\{z\} \in H_q(C)$ clase de homología de z.

Def: Sean $C = \{C_q, \partial_q\}$ y $C' = \{C'_q, \partial'_q\}$. Un morfismo de complejos de cadenas $f: C \to C'$ es una suc. de homomorfismos $f_q : C_q \to C'_q$ t.q. $\partial'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$, $\forall q$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
C & \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial} & C_q & \xrightarrow{\partial} & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle f_{q+1}} & = & \downarrow{\scriptstyle f_q} & = & \downarrow{\scriptstyle f_{q-1}} & & \\
C' & \cdots & \xrightarrow{\partial'} & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'} & C'_q & \xrightarrow{\partial'} & C'_{q-1} & \xrightarrow{\partial'} & \cdots
\end{array}$$

Obs:

a) Un morfismo de complejos $f: C \to C'$ manda ciclos en ciclos y fronteras en fronteras. Por lo tanto, f induce homomorfismos:

$$f_* = H_q(f) : H_q(C) \longrightarrow H_q(C')$$
$$\{z\} \longmapsto \{f_q(z)\}$$

b) Si $f: C \to C$ es la identidad (i.e. $f_q: C_q \to C_q$ es la identidad $\forall q$), entonces $f_*: H_q(C) \to H_q(C)$ es el homomorfismo identidad.

c) Si $f: C \to C'$ y $g: C' \to C''$ morfismos de complejos entonces $g \circ f: C \to C''$ es un morfismo de complejos y $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_q(C) \to H_q(C'')$.

d) El morfismo cero $0: C \to C'$ (i.e. $f_q = 0 \ \forall q$) es un morfismo de complejos y $0_* = 0$.

Def: Una sucesión de morfismos de complejos

$$0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$$

es exacta corta si $\forall q \in \mathbb{Z}$, la sucesión $0 \to C'_q \xrightarrow{f_q} C_q \xrightarrow{g_q} C''_q \to 0$ es exacta corta.

S.E.C. de complejos de cadenas:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"'] & C_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & C''_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial'_q"'] & C_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & C''_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d] & C_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d] & C''_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Dada $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$, definimos el homomorfismo de conexión:

$$\begin{aligned}\partial_* : H_q(C'') &\longrightarrow H_{q-1}(C') \\ \{z\} &\longmapsto \{f_{q-1}^{-1}\, \partial_q\, g_q^{-1}(z)\}\end{aligned}$$

Tma: (Lema fundamental del álgebra homológica)

Para toda SEC de complejos $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ $\exists$ una SEL de gpos. de homología:

$$\cdots \xrightarrow{g_*} H_{q+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{f_*} H_q(C) \xrightarrow{g_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

Def:

a) Sea $C = \{C_q, \partial_q\}$ complejo de cadenas y $C'_q \subseteq C_q$ subgpo. tal que $\partial_q(C'_q) \subseteq C'_{q-1}$. Entonces $\{C'_q, \partial_q|_{C'_q}\}$ es un complejo de cadenas y decimos que C' es un subcomplejo de C.

b) El complejo cociente C/C' consiste de los gpos. cociente C_q/C'_q y los homomorfismos

$$\bar{\partial}_q : C_q/C'_q \longrightarrow C_{q-1}/C'_{q-1}$$ inducidos por los ∂_q.

Obs:

- Si $C' \subseteq C$ es un subcomplejo, entonces

$$0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C/C' \longrightarrow 0$$

es una SEC de complejos y la sig. sucesión es exacta larga:

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(C/C') \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{i_*} H_q(C) \xrightarrow{j_*} H_q(C/C') \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

- Esta SEL es natural c/r a morfismos de parejas de complejos $f:(C,C') \to (D,D')$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "j_*"] & H_{q+1}(C/C') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "="] & H_q(C') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "="] & H_q(C) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "="] & H_q(C/C') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & H_{q+1}(D/D') \arrow[r, "\partial_*"] & H_q(D') \arrow[r, "i_*"] & H_q(D) \arrow[r, "j_*"] & H_q(D/D') \arrow[r, "\partial_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Def: (Homotopía de morfismos)

$f, g: C \to C'$ morfismos de complejos de cadenas se dicen homotópicos (sentido algebraico) si $\exists$ una colección de homomorfismos

$$D_q : C_q \to C'_{q+1} \qquad \forall q \in \mathbb{Z}$$

tales que: $\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = f_q - g_q$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{q+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{q+1}"] \arrow[dl] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, shift right, "f_q"'] \arrow[d, shift left, "g_q"] \arrow[dl, "D_q"'] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, shift right, "f_{q-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{q-1}"] \arrow[dl, "D_{q-1}"'] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"'] & C'_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"'] & C'_q \arrow[r, "\partial'_q"'] & C'_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y escribimos: $f \simeq g$.

Tma:

Si $f \simeq g : C \to C'$ entonces $f_* = g_* : H_q(C) \to H_q(C')$
$\forall q \in \mathbb{Z}$.

Tma: La homotopía (algebraica) es una R.E. en el conjunto de morfismos de complejos $C \to C'$.

Además:

Si $f \simeq g : C \to C'$ & $f' \simeq g' : C' \to C''$ entonces: $f' \circ f \simeq g' \circ g$.

Def: Un morfismo de complejos $f : C \to C'$ es una <u>equivalencia homotópica</u> si $\exists\, g : C' \to C$ tal que $g \circ f \simeq id_C$ y $f \circ g \simeq id_{C'}$.

Tma: Si $f : C \to C'$ es una <u>equivalencia homotópica</u>, entonces $f_* : H_q(C) \xrightarrow{\cong} H_q(C')$ es un <u>isomorfismo</u> $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Leer: Categorías y Funtores.