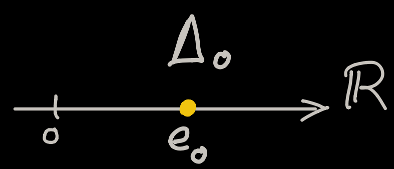
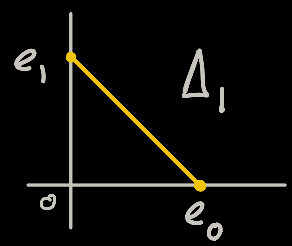
Cap. 9 Homología Singular

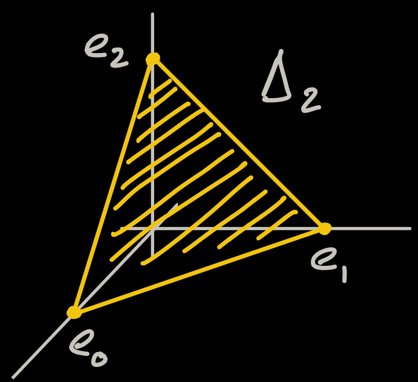
9.1 Grupos de Homología

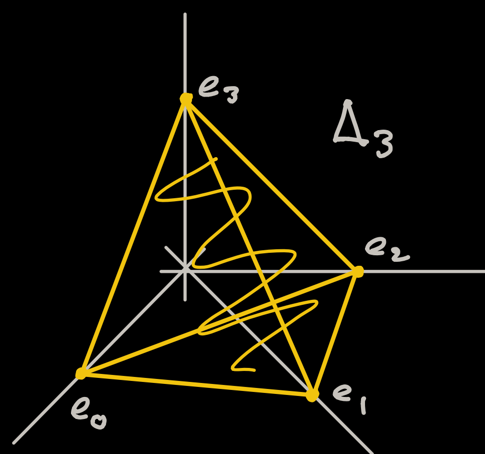
simplejo estándar de dim. q:

$$\Delta_q = \left\{ (x_0, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1 \right\}$$









Para $q \geq 1$, $i = 0, \dots, q$ definimos:

$$\delta^i_{q-1} : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$$

i-ésima cara de Δ_q

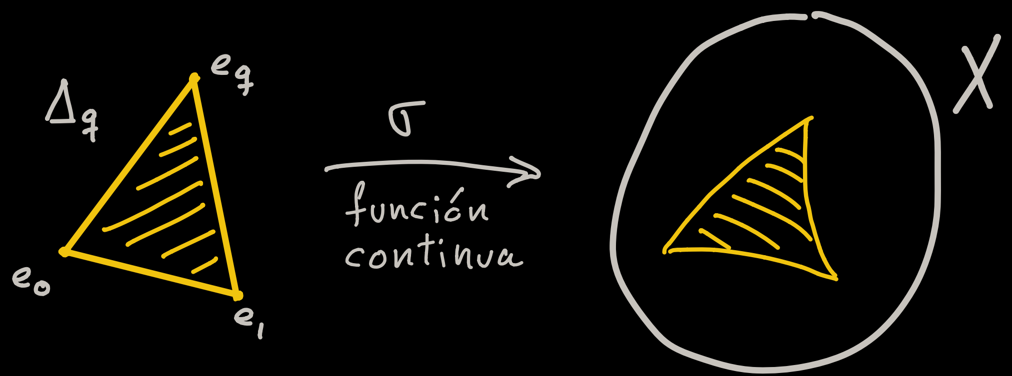
$$[e_0, \dots, e_{q-1}] \longmapsto [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_q]$$

Lema: Para $q \geq 2$ y $0 \leq k < j \leq q$: $\delta^{j}_{q-1} \circ \delta^{k}_{q-2} = \delta^{k}_{q-1} \circ \delta^{j-1}_{q-2}$

Dem: Evaluar ambos lados en $e_0, \dots, e_{q-2} \in \Delta_{q-2}$. ∎

Def: Sea X un espacio topológico.

a). q-simplejo singular en X:



b). El gpo. de q-cadenas singulares de X:

$S_q(X)$ = gpo. abeliano libre generado por todos los q-simplejos singulares de X.

c). Para $q \geq 1$ se define el operador frontera:

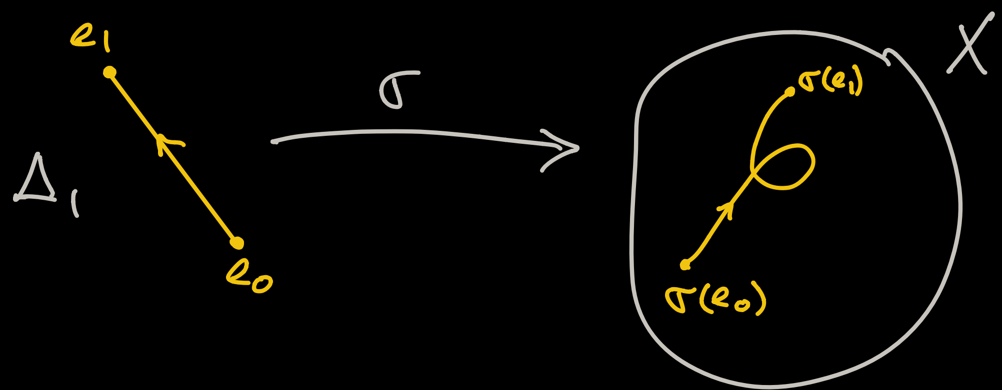
$$\partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X), \quad \partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, \sigma \circ \delta^i_{q-1}$$

$$S(X): \; \dots \longrightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0$$

Ejems:

Si $q=0$, un 0-simplejo singular $\sigma: \Delta_0 \to X$ está dado por un pto. $x = \sigma(e_0) \in X$.

Si $q=1$, un 1-simplejo singular $\sigma: \Delta_1 \to X$ es una trayectoria en X



Frontera: $\partial_1(\sigma) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = x_1 - x_0$.

Lema: $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

Dem: Ejercicio, Usar el lema anterior. $\blacksquare$

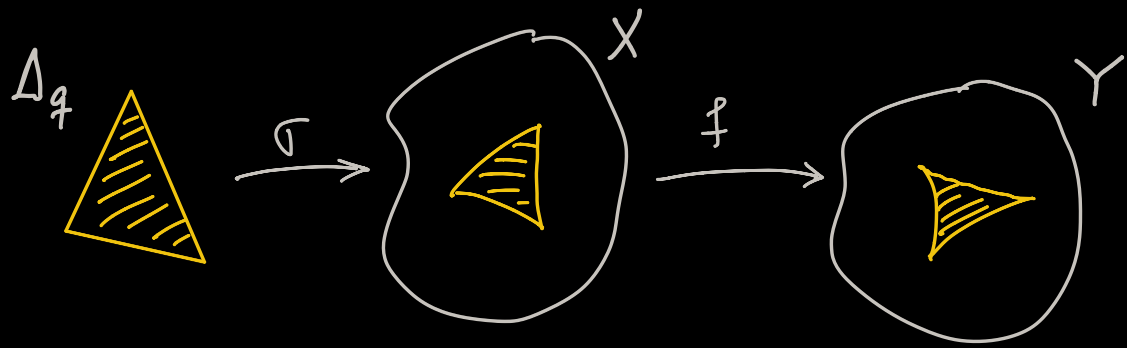
Def:

- $Z_q(X) = \ker \partial_q$ $\quad$ q-ciclos de X
- $B_q(X) = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ $\quad$ q-fronteras de X
- $H_q(X) = Z_q(X) / B_q(X)$ $\quad$ q-ésimo gpo. de homología singular de X

Tma: Toda función continua $f : X \longrightarrow Y$ induce un homomorfismo de gpos. de cadenas:

$$S_q(f) \; : \; S_q(X) \longrightarrow S_q(Y)$$

$$\sum_\sigma n_\sigma \cdot \sigma \longmapsto \sum_\sigma n_\sigma \cdot (f \circ \sigma)$$



y la familia $S(f) = \{ S_q(f) \}_{q \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos de cadenas: $S(f) : S(X) \longrightarrow S(Y)$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_\circ"'] \arrow[dr, phantom, "="] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_\circ"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & S_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\circ"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & S_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"] & S_{q-1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & S_0(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Obs: Toda función continua $f : X \longrightarrow Y$ induce un homomorfismo

$$f_* = H_q(f) \; : \; H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$$

$$\{z\} \longmapsto \{f_\circ(z)\}$$

Tma: Para $q \geq 0$, H_q es un funtor de la categoría de espacios topológicos en la categoría de gpos. abelianos:

$$H_q : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$$
$$X \rightsquigarrow H_q(X)$$

$$f: X \to Y \rightsquigarrow f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$$

esto es,
- $(id_X)_* = id_{H_q(X)}$
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Ejem: Sea X un solo punto. Entonces:

$$H_q(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $q \geq 0$ sea $\sigma_q : \Delta_q \to X$ el q-simplejo sing. cte.

Entonces: $S_q(X) = \langle \sigma_q \rangle \cong \mathbb{Z}$. Además:

$$\partial \sigma_q = \sigma_{q-1} - \sigma_{q-1} + \ldots + (-1)^q \sigma_{q-1} = \begin{cases} \sigma_{q-1} & q > 0, \text{ par} \\ 0 & q > 0, \text{ impar} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \xrightarrow{id} & S_3(X) & \xrightarrow{0} & S_2(X) & \xrightarrow{id} & S_1(X) & \xrightarrow{0} & S_0(X) & \xrightarrow{0} & 0 \\ & \| & & \| & & \| & & \| & & \\ & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Tma: Si $f: X \to Y$ es constante, entonces $\forall q > 0$ $f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$ es el homomorfismo trivial.

Dem: Supongamos que $f(x) = y_0$ $\forall x \in X$. Entonces

f es la composición $X \to \{y_0\} \xrightarrow{i} Y$

$\therefore$ f_* es la composición $H_q(X) \to H_q(y_0) \to H_q(Y)$

$\Longrightarrow$ $f_* = 0$ si $q > 0$.

$\blacksquare$

Tma: Sean $\{X_j\}_{j \in J}$ las comp. arco-conexas de X.

Entonces: $$H_q(X) \cong \bigoplus_{j \in J} H_q(X_j)$$

Dem: Si $\sigma: \Delta_q \to X$ es un simplejo sing., $\sigma(\Delta_q) \subseteq X_j$ para algún $j \in J$. Por lo tanto:

$$S_q(X) \cong \bigoplus_j S_q(X_j)$$

Restricción de la frontera: $\partial_q: S_q(X_j) \to S_{q-1}(X_j)$

$$H_q(X) = Z_q(X) / B_q(X) \cong \frac{\bigoplus Z_q(X_j)}{\bigoplus B_q(X_j)} \cong \bigoplus_j Z_q(X_j) / B_q(X_j)$$

$\blacksquare$

Tma: Para todo espacio X, $H_0(X)$ es un gpo. abeliano libre de rango igual al núm. de comp. arco-conexas de X.

Dem: Por el Tma. anterior, basta considerar el caso en que X es arco-conexo y $X \neq \emptyset$.

Sea
$$\varepsilon : S_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\sum_x n_x \cdot x \longmapsto \sum_x n_x$$

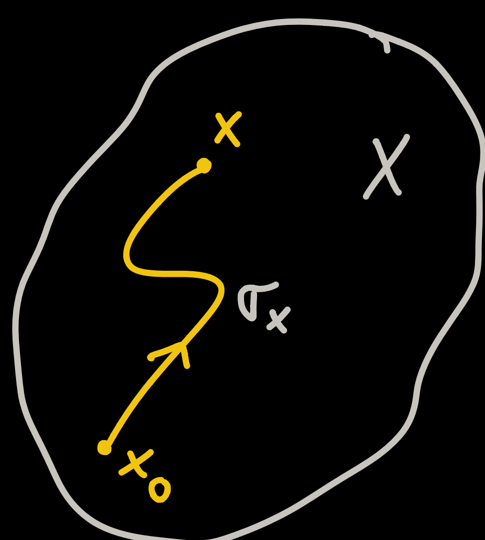
1er. Teorema de isomorfismo

Entonces, ε es epimorfismo y $S_0(X)/\ker \varepsilon \cong \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $\ker \varepsilon = B_0(X)$.

- Si σ es un 1-simplejo, entonces $\partial\sigma = x_1 - x_0$
  $\therefore$ $\varepsilon(\partial\sigma) = 0$. Por tanto, $B_0(X) \subseteq \ker \varepsilon$.

- Sea $x_0 \in X$ y $\forall x \in X$ sea $\sigma_x : \Delta_1 \to X$ una trayectoria de x_0 a x.



Sup. $n_0 x_0 + \dots + n_k x_k \in \ker \varepsilon$

$$\therefore\ n_0 + \dots + n_k = 0$$

$$n_0 x_0 + \dots + n_k x_k = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} n_i \, \partial \sigma_{x_i}$$

$\therefore$ $\ker \varepsilon \subseteq B_0(X)$.

$\blacksquare$

Cor: Si X, Y son arco-conexos, entonces todo mapeo $f: X \to Y$ induce un isom. $f_*: H_0(X) \xrightarrow{\cong} H_0(Y)$.

Ejercicio: Para todo subconjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$H_q(A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Def: Un espacio arco-conexo se dice acíclico si

$$H_q(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

9.2 Homología Relativa

Sea $A \subseteq X$ un subespacio. Entonces:

- $S_q(A)$ es un subgrupo de $S_q(X)$ $\forall q \geq 0$ y
- $S(A)$ es un subcomplejo de $S(X)$.

Def: El complejo cociente $S(X, A) := S(X)/S(A)$ es el complejo de cadenas relativas de la pareja (X, A).

Tenemos así una SEC de complejos:

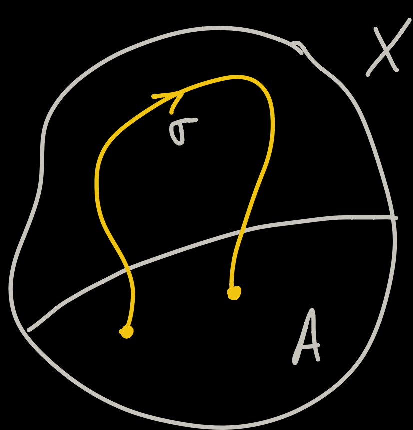
$$0 \to S(A) \longrightarrow S(X) \longrightarrow S(X,A) \longrightarrow 0$$

Explícitamente:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_{q+1}(A) \arrow[r, "i_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "j_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & S_{q+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_q(A) \arrow[r, "i_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & S_q(X) \arrow[r, "j_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & S_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{q-1}(A) \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "j_{q-1}"] \arrow[d] & S_{q-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Ejem: 1-ciclo relativo en (X,A)

$\sigma \in S_1(X,A)$



Def: El q-ésimo gpo. de homología relativa

$$H_q(X,A) := H_q\, S(X,A)$$

La correspondiente SEL es la sucesión exacta larga en homología de la pareja (X,A):

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

Esta sucesión es natural c/r a mapeos $f:(X,A)\to(Y,B)$

Ejem: Si $A=\{x_0\}$, entonces $H_q(\{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q\neq 0 \end{cases}$

Por lo tanto:

$$j_*: H_q(X) \xrightarrow{\cong} H_q(X,x_0) \quad \forall q\neq 0$$

y se tiene una SEC:

$$0 \to H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X,x_0) \to 0$$

Más aún, si $f:X\to\{x_0\}$ es el mapeo constante, $f_*\circ i_* = id$ y la SEC anterior se escinde.

$$\therefore \quad H_0(X) \cong \underbrace{H_0(X,x_0)}_{\text{Homología reducida } \tilde{H}_0(X)} \oplus \mathbb{Z}$$

Ejem: Si $A \subseteq X$ es un retracto, i.e. $\exists\ r: X \to A$ tal que $r \circ i = id_A$, entonces:

$$i_* : H_q(A) \longrightarrow H_q(X) \quad \text{es monomorfismo}$$
$$r_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(A) \quad \text{es epimorfismo}$$

y $r_* \circ i_* = id_{H_q(A)}$.

Por lo tanto, la SEL se parte en SEC's de la forma:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r, "i_*"] & H_q(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[l, bend left, "r_*"] & H_q(X,A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que se escinden. En este caso:

$$H_q(X) \cong H_q(A) \oplus H_q(X,A) \qquad \forall q.$$

Generalización: SEL de una terna

Sean $B \subseteq A \subseteq X$ subespacios de X y denotemos $i: (A,B) \longrightarrow (X,B)$ & $j: (X,B) \longrightarrow (X,A)$ las inclusiones.

Entonces:

3er. Teorema de isomorfismo

$$\frac{S(X)/S(B)}{S(A)/S(B)} \cong \frac{S(X)}{S(A)}$$

y se obtiene una SEC de complejos:

$$0 \to S(A,B) \xrightarrow{i_\bullet} S(X,B) \xrightarrow{j_\bullet} S(X,A) \to 0$$

La correspondiente SEL es la sucesión exacta larga en homología de la terna $B \subseteq A \subseteq X$:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A,B) \xrightarrow{i_*} H_q(X,B) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$