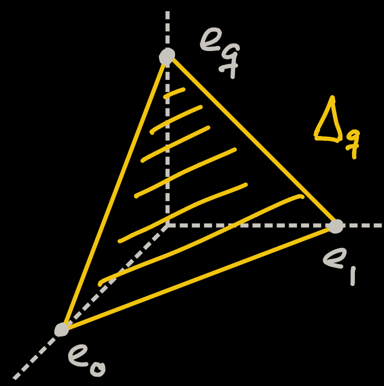
Homología de Espacios Topológicos
(Homología Singular)

- q-simplejo estándar:



$$\Delta_q = \{ x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \}$$

Para X espacio topológico:

- q-simplejo singular: $\sigma : \Delta_q \to X$ mapeo

- $S_q(X)$ = gpo. abeliano libre generado por los q-simplejos singulares de X

- Operador frontera: $\partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ \delta_{q-1}^{i}$$

donde $\delta_{q-1}^{i} : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$ es la i-ésima cara.

$$S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \qquad \partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$$

- $Z_q(X) = \ker \partial_q$

- $B_q(X) = \operatorname{im} \partial_{q+1}$

$$H_q(X) := Z_q(X) \big/ B_q(X)$$

- Si $f: X \to Y$ es un mapeo: $f_\circ : S_q(X) \to S_q(Y)$
$$\sigma \longmapsto f\circ\sigma$$

 * Los $f_\circ$ conmutan con ∂_q y definen un morfismo de complejos $f_\circ : S(X) \to S(Y)$.

 * f induce homomorfismos en homología
$$f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$$
$$\{z\} \longmapsto \{f_\circ(z)\}$$

 * $(id_X)_* = id_{H_q(X)}$, $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$.

- Si $A \subseteq X$, $S_q(A) \subseteq S_q(X)$ y $S_q(X,A) := S_q(X)/S_q(A)$.

Operador frontera: $\overline{\partial}_q : S_q(X,A) \longrightarrow S_{q-1}(X,A)$
$$\overline{c} \longmapsto \overline{\partial_q c}$$

$\Rightarrow$ SEC de complejos de cadenas
$$0 \to S(A) \xrightarrow{i_\circ} S(X) \xrightarrow{j_\circ} S(X,A) \to 0$$

y una SEL en homología:
$$\cdots \to H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

9.3 Invariancia Homotópica.

Tma: Si $f, g : X \to Y$ son mapeos homotópicos, entonces los homomorfismos inducidos en homología

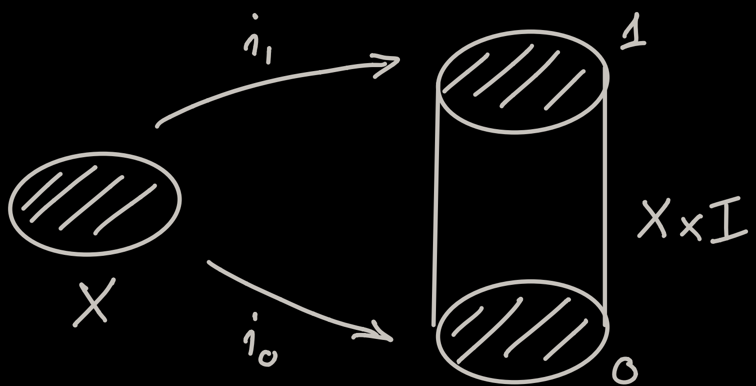
$$f_*, g_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$$

son iguales, $\forall q \geq 0$.

Idea general: ¿Qué es una homotopía entre f y g?
Es una función continua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= f(x) \\ H(x,1) &= g(x) \end{aligned}\right\} \quad \forall x \in X$$

Sean $i_0, i_1 : X \longrightarrow X \times I$ las inclusiones de las "tapas" inferior y superior del cilindro



$i_1(x) = (x, 1)$

$i_0(x) = (x, 0)$

$$\therefore \quad \begin{aligned} f(x) &= H \circ i_0(x) \\ g(x) &= H \circ i_1(x) \end{aligned}$$

$$X \underset{i_0}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

$$S(X) \underset{(i_0)_\circ}{\overset{(i_1)_\circ}{\rightrightarrows}} S(X \times I) \xrightarrow{H_\circ} S(Y)$$

Probaremos $(i_0)_\bullet \simeq (i_1)_\bullet$ morfismos homotópicos.
Luego, al componer con $H_\bullet$ se tiene:

$$f_\bullet = H_\bullet \circ (i_0)_\bullet \simeq H_\bullet \circ (i_1)_\bullet = g_\bullet$$

Pero $f_\bullet \simeq g_\bullet \Rightarrow$ los homomorfismos inducidos en homología son iguales.

Hay que definir: $D_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X \times I)$

tal que: $\partial_{q+1} D_q(\sigma) + D_{q-1}\partial_q(\sigma) = i_{1\bullet}(\sigma) - i_{0\bullet}(\sigma)$

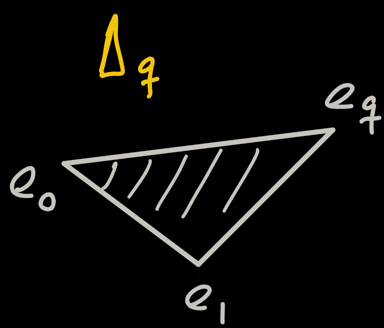
$\forall\, \sigma : \Delta_q \longrightarrow X$ simplejo singular

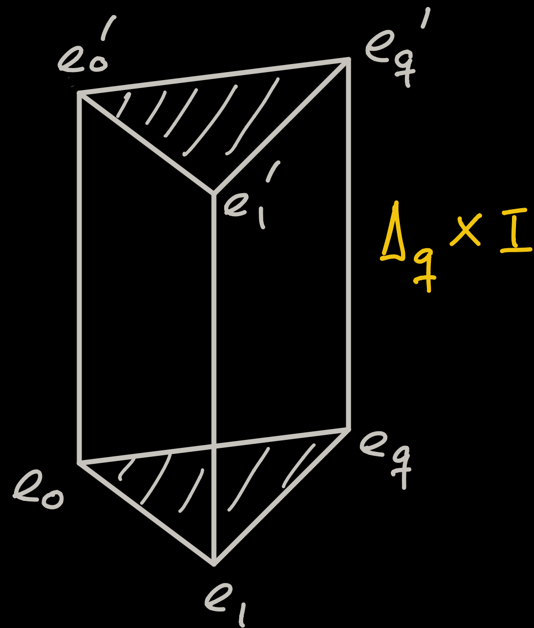
$$\begin{tikzcd}
 & \cdots & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "D_q"'] \arrow[d, shift right, "i_{0\bullet}"'] \arrow[d, shift left, "i_{1\bullet}"] & S_{q-1}(X) \arrow[dl, "D_{q-1}"] \cdots \\
\cdots\ S_{q+1}(X \times I) \arrow[rr, "\partial_{q+1}"] & & S_q(X \times I) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$q = 0$ $\qquad \partial_1 D_0(\sigma) = i_{1\bullet}(\sigma) - i_{0\bullet}(\sigma)$

Primer caso: $X = \Delta_q$ & $\sigma = \langle e_0, \dots, e_q \rangle$ mapeo identidad de Δ_q

En $\Delta_q \times I$ denotamos: $e_i' = (e_i, 1)$
$e_i = (e_i, 0)$ (abuso de notación)



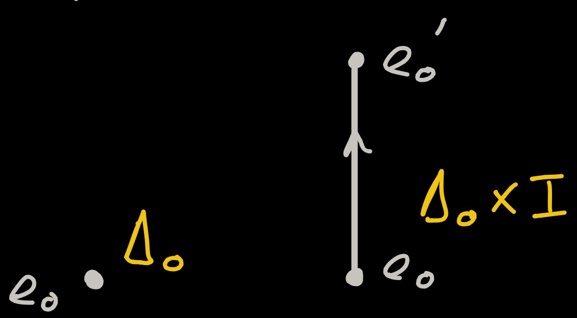


Definimos:

$$D_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle e_0, \dots, e_i, e_i', \dots, e_q' \rangle$$

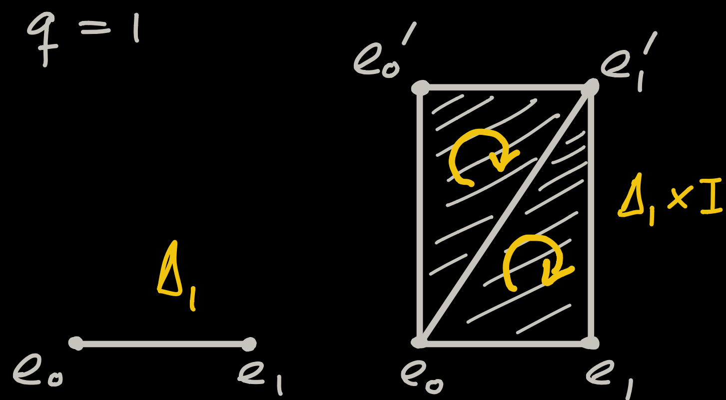
Ejems:

$q = 0$



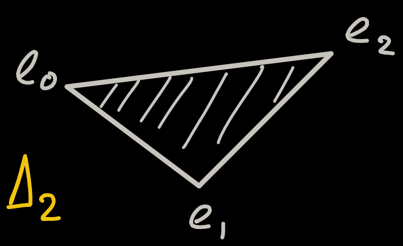
$D_0(\sigma) = \langle e_0, e_0' \rangle$

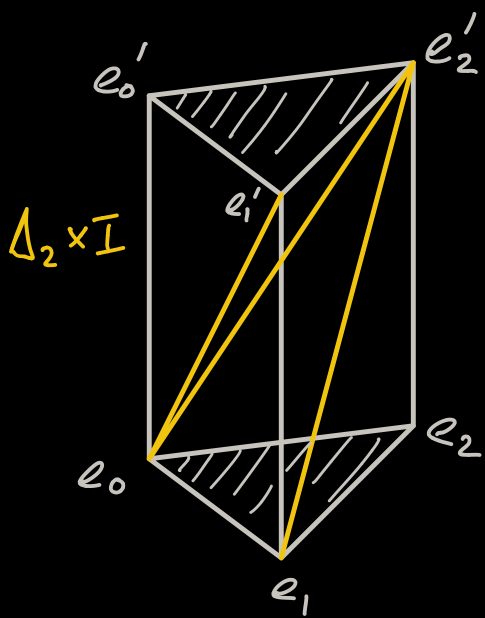
$q = 1$



$D_1(\sigma) = \langle e_0, e_0', e_1' \rangle - \langle e_0, e_1, e_1' \rangle$

$$q=2, \quad D_2(\sigma) = \langle e_0, e_0', e_1', e_2' \rangle - \langle e_0, e_1, e_1', e_2' \rangle$$
$$+ \langle e_0, e_1, e_2, e_2' \rangle$$





Prisma se descompone en 3 pirámides

$\left(\text{Idea: } V = \dfrac{A \cdot h}{3} \right)$

D_q = "operador prisma". Se define similarmente para las caras de Δ_q.

Para $q=0$: $\partial_1 D_0(\sigma) = \partial_1 \langle e_0, e_0' \rangle = \langle e_0' \rangle - \langle e_0 \rangle$
$$= i_{1\bullet}(e_0) - i_{0\bullet}(e_0)$$

Para $q=1$: $\partial_2 D_1(\sigma) + D_0 \partial_1(\sigma) = \partial_2\left(\langle e_0, e_0', e_1' \rangle - \langle e_0, e_1, e_1' \rangle\right)$
$$+ D_0\left(\langle e_1 \rangle - \langle e_0 \rangle\right)$$

$$= \langle e_0', e_1' \rangle \cancel{- \langle e_0, e_1' \rangle} \cancel{+ \langle e_0, e_0' \rangle} \cancel{- \langle e_1, e_1' \rangle} \cancel{+ \langle e_0, e_1' \rangle} - \langle e_0, e_1 \rangle$$
$$\cancel{+ \langle e_1, e_1' \rangle} \cancel{- \langle e_0, e_0' \rangle}$$
$$= \langle e_0', e_1' \rangle - \langle e_0, e_1 \rangle = i_{1\bullet}(\sigma) - i_{0\bullet}(\sigma)$$

En general: Si $\sigma = \langle e_0, \dots, e_q \rangle = \Delta_q$ mapeo identidad

$$\partial_{q+1} D_q(\sigma) + D_{q-1}\partial_q(\sigma) = i_{1\bullet}(\sigma) - i_{0\bullet}(\sigma)$$

(Ejercicio)

Caso general: $D_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X \times I)$

Sea $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$ simplejo singular arbitrario.

Entonces definimos:

$$D_q(\sigma) := (\sigma \times id)_\bullet D_q\langle e_0, \dots, e_q\rangle$$

$\forall$ q-simplejo sing. de X

$$\begin{tikzcd} S_q(\Delta_q) \arrow[r, "D_q"] \arrow[d, "\sigma_\bullet"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & S_{q+1}(\Delta_q \times I) \arrow[d, "(\sigma\times id)_\bullet"] \\ S_q(X) \arrow[r, "D_q"] & S_{q+1}(X \times I) \end{tikzcd}$$

Este homomorfismo satisface:

$$\partial_{q+1} D_q(\sigma) + D_{q-1}\partial_q(\sigma) = i_{1\bullet}(\sigma) - i_{0\bullet}(\sigma)$$

$$\therefore \quad i_{0\bullet} \simeq i_{1\bullet}$$

$\blacksquare$

Tma: Si $f: X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo inducido en gpos. de homología

$$f_*: H_q(X) \xrightarrow{\cong} H_q(Y)$$

es un isomorfismo $\forall q \geq 0$.

Dem: Sea $g: Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$.

Entonces:

$$(g \circ f)_* = id_{H_q(X)}$$

$$(f \circ g)_* = id_{H_q(Y)}$$

$$H_q(X) \underset{g_*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} H_q(Y)$$

Pero $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ & $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Luego, f_* & g_* son isomorfismos inversos uno del otro. $\blacksquare$

Ejems:

1. $f: \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to S^1$ es una equivalencia $\simeq$.
   $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$

$\therefore$ $f_*: H_q(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \xrightarrow{\cong} H_q(S^1)$ es isomorfismo $\forall q \geq 0$.

2. $D^n \simeq *$ $\Rightarrow$ $H_q(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$