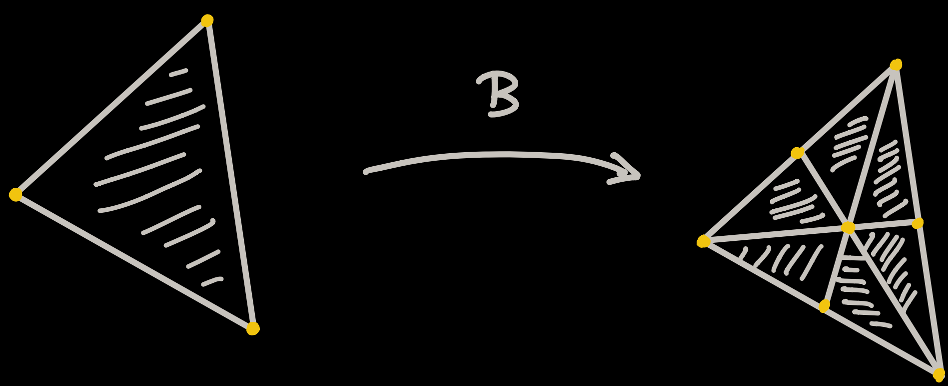
9.4 El Teorema de Excisión.

Tma: Sean $U \subseteq A \subseteq X$ espacios tales que $\bar{U} \subseteq \mathring{A}$.
Entonces la inclusión $i: (X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow (X, A)$
induce isomorfismos

$$i_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(X, A) \qquad \forall q \geq 0.$$

Dem: Ver Cap. 15 Greenberg - Harper.

Se usa el operador $B : S_q(X) \longrightarrow S_q(X)$ de subdivisión baricéntrica.

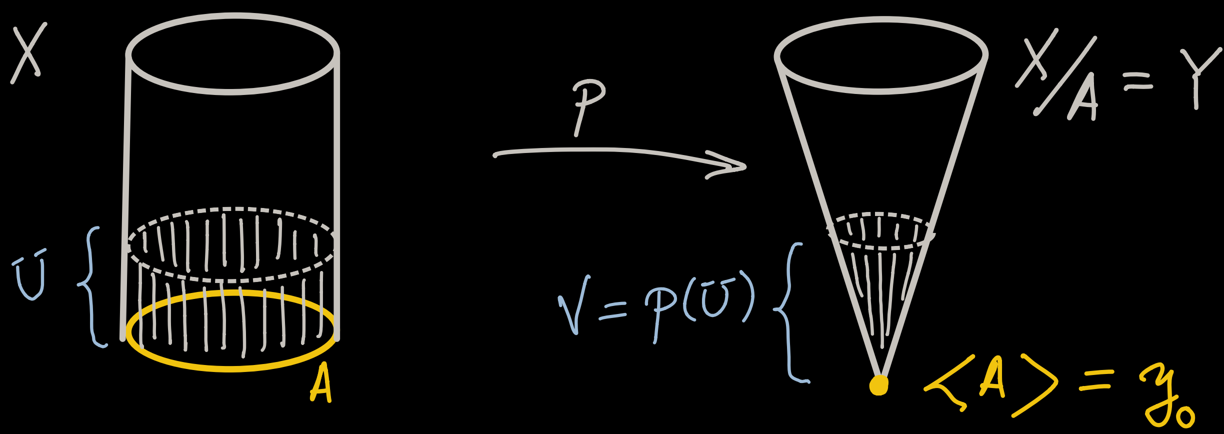


Tma: Sea (X, A) una pareja de CW-complejos y X/A el cociente de X al colapsar A a un pto. $\langle A \rangle$.
Entonces la proyección $p: (X, A) \longrightarrow (X/A, \langle A \rangle)$

induce un isomorfismo:

$$p_* : H_q(X, A) \xrightarrow{\cong} H_q(X/A, \langle A \rangle), \quad \forall q \geq 0.$$

Dem: $A \subseteq X$ subcomplejo $\exists$ vecindad $\bar{U}$ de A en X tal que A es retracto fuerte por deformación de $\bar{U}$



$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & H_q(X, \bar{U}) \arrow[d, "p_*'"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & H_q(X \setminus A, U \setminus A) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "p_*''"', "\cong"] \\
H_q(Y, y_0) \arrow[r, "\cong"] & H_q(Y, V) & H_q(Y \setminus y_0, V \setminus y_0) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

$\cong$ SEL y lema del 5°.

$\cong$ Tma. de Excisión

$\cong$ homeo. relativo.

$\blacksquare$

Cor: $H_q(X, A) \cong H_q(X/A) \quad \forall q > 0.$

Dem: $H_q(X, A) \xrightarrow[\cong]{p_*} H_q(Y, y_0) \xleftarrow[\cong]{j_*} H_q(Y)$

Tma. anterior

Iso. para $q > 0$.

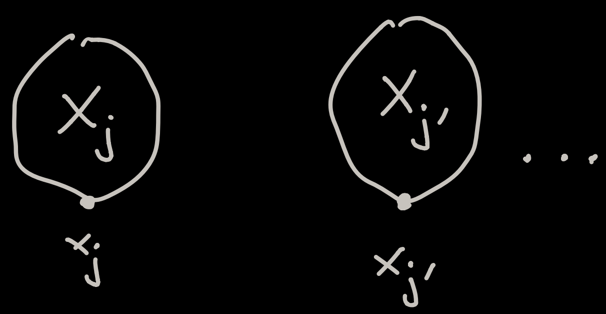
$\blacksquare$

Tma: Para $j \in J$ sea X_j CW-complejo y $x_j \in X_j$ 0-celda.
Sea $\bigvee_{j\in J} X_j$ la unión en un pto. de los X_j c/r a x_j.
Entonces, para $q > 0$ tenemos un isomorfismo:

$$\bigoplus_j H_q(X_j) \xrightarrow{\cong} H_q\Big(\bigvee_j X_j\Big)$$

$$(\{z_j\})_{j\in J} \longmapsto \Big\{\sum_j z_j\Big\}_{\bigvee_j X_j}$$

Dem:



$$X = \coprod_j X_j$$

$$A = \{x_j \mid j \in J\}$$

$$X/A = \bigvee_j X_j$$

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X,A) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X/A) \\ \cong & & & & \cong \\ \bigoplus_j H_q(X_j) & & & & H_q\big(\bigvee_j X_j\big). \end{array}$$

A es discreto

$H_q(A) = 0$, $q > 0$.

$\blacksquare$

Props. del operador de subdivisión baricéntrica

$$B : S_q(X) \longrightarrow S_q(X)$$

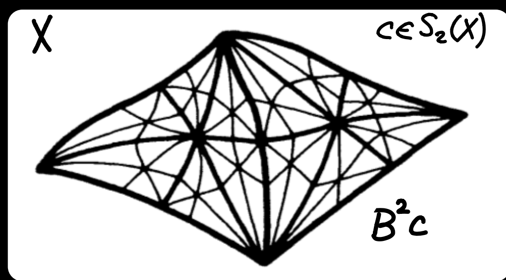
- Si $f: X \to Y$, entonces $f_\circ B = B f_\circ : S_q(X) \to S_q(Y)$.

- Los $B : S_q(X) \to S_q(X)$ definen un morfismo de complejos de cadenas $B : S(X) \to S(X)$.

- Se tiene: $B \simeq id : S(X) \longrightarrow S(X)$.

- El operador $B: S(X) \to S(X)$ se puede iterar:

$$B^r = B \circ B \circ \dots \circ B : S(X) \to S(X)$$



Lema: Para todo subespacio $A \subseteq X$ y $r \geq 1$:

a). Si $c \in S_q(A)$, entonces $B^r(c) \in S_q(A)$.

b). Si $z \in S_q(X)$ es ciclo relativo mód A, entonces $B^r z$ es ciclo relativo mód A, homólogo a z.

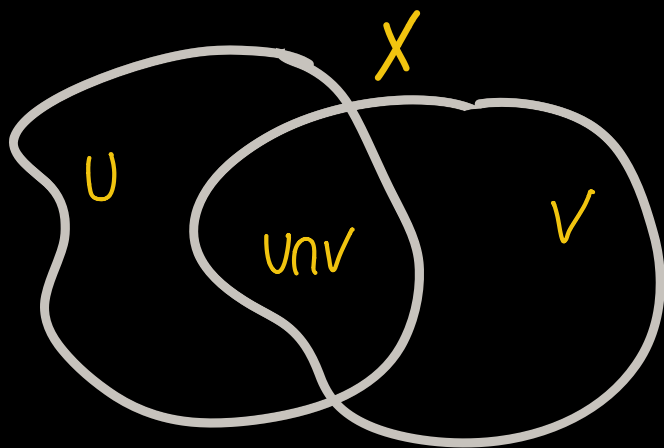
Lema: Si $X = U \cup V$ con U y V abiertos en X, entonces

$$\forall c \in S_q(X) \ \exists\, r \geq 1 \text{ tal que } B^r c = x + y$$

con $x \in S_q(U)$ & $y \in S_q(V)$.

Tma (Mayer - Vietoris): Si $X = U \cup V$ con U y V abiertos en X, entonces la sig. suc. es exacta:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_q(U \cap V) \xrightarrow{\mu} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{\nu} H_q(X) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\mu} \cdots$$



donde:

$$\mu : \{z\}_{U\cap V} \longmapsto (\{z\}_U, -\{z\}_V)$$

$$\nu : (\{z_1\}_U, \{z_2\}_V) \longmapsto \{z_1 + z_2\}_X$$

$$\Delta : \{z\}_X \longmapsto \{\partial x\}_{U\cap V}$$

con $B^r z = x + y$ & $x \in S_q(U)$
$y \in S_q(V)$.

Obs: $\partial z = 0 \implies \partial x + \partial y = 0$.

Cambiar ∂x por ∂y, equivale a cambiar Δ por $-\Delta$.

Dem: Ejercicio.

De hecho: Excisión $\iff$ Mayer Vietoris

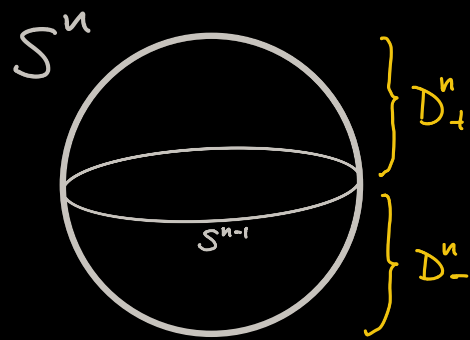
Obs: Sea $X = X_1 \cup X_2$, con X_1, X_2 no nec. abiertos. Supongamos $\exists$ vecindades U y V tales que

$$X_1 \subseteq U, \quad X_2 \subseteq V \quad \& \quad X_1 \cap X_2 \subseteq U \cap V$$

son retractos por deformación. Entonces $\exists$ una sucesión de Mayer-Vietoris para (X, X_1, X_2).

Ejem: $S^n = D^n_+ \cup D^n_-$

donde $D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1}$.



M.V. $\Rightarrow H_{q+1}(S^n) \xrightarrow{\cong} H_q(D^n_+ \cap D^n_-) = H_q(S^{n-1})$

para $q > 0$.

- Para $q > n > 0$:

$$H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_{q-n+1}(S^1) \cong H_{q-n}(S^0) = 0$$

- Para $0 < q < n$:

$$H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_1(S^{n-q+1}) = 0$$

?

Mayer-Vietoris:

$$0 \to H_1(S^{n-q+1}) \xrightarrow{\Delta} \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\parallel}}{H_0(S^{n-q})} \xrightarrow{\text{no cero}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\text{epi}} \mathbb{Z} \to 0$$

cero

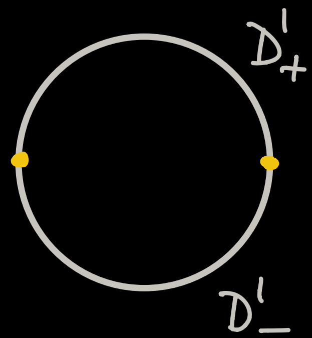
$\ker \cong \mathbb{Z}$

- Para $q=n$:

¿Por qué?

$$H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Mayer-Vietoris para $S^1 = D^1_+ \cup D^1_-$



$$S^1 = D^1_+ \cup D^1_-$$

$$S^0 = D^1_+ \cap D^1_-$$

$$0 \to H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(D^1_+ \cap D^1_-) \xrightarrow{\mu} H_0(D^1_+) \oplus H_0(D^1_-) \xrightarrow{\nu} H_0(S^1) \to 0$$

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\text{epi}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

3 iso. sobre su imagen

2 $\operatorname{im} \cong \mathbb{Z}$

$\ker \cong \mathbb{Z}$

$\ker \cong \mathbb{Z}$

1

En resumen:

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z} & q=n \\ 0 & q \neq 0, n. \end{cases}$$

(Para $n \geq 1$)

¿Caso $n=0$?

• Si $X_1 \cap X_2$ es acíclico, entonces

$$H_q(X) \cong H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \quad \forall q \neq 0.$$

• Supongamos X_1 y X_2 acíclicos. Entonces:

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X) \xrightarrow[\cong]{\Delta} H_q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

Si $z \in S_q(X_1 \cap X_2)$ es un ciclo, para $q > 0$, existen

$x_1 \in S_{q+1}(X_1)$ y $x_2 \in S_{q+1}(X_2)$ t.q. $\partial x_1 = z = \partial x_2$

$\therefore$ $x_1 - x_2$ es un $(q+1)$-ciclo en $X = X_1 \cup X_2$

y
$$\begin{aligned} H_q(X_1 \cap X_2) &\longrightarrow H_{q+1}(X) \\ \{z\} &\longmapsto \{x_1 - x_2\} \end{aligned}$$

es el isomorfismo inverso de Δ.

Más aún: ★ $H_1(X)$ es un gpo. abeliano libre

★ Si $X_1 \cap X_2$ tiene k comp. arco-conexas, entonces $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{k-1}$.