9.5 Homología de D^n, S^n, etc.

Sabemos que:

$$H_q(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q>0 \end{cases} \qquad H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ \mathbb{Z} & q=n \\ 0 & q\neq 0,n \end{cases}$$

(para $n \geqslant 1$)

Tma: Para todo $n \geqslant 0$

$$H_q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=n \\ 0 & q\neq n \end{cases}$$

Dem: Para $q>0$

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong H_q(D^n/S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q=n \\ 0 & q\neq n. \end{cases}$$

Caso $q=0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to H_0(S^{n-1}) & \xrightarrow{\text{epi}} & H_0(D^n) & \xrightarrow{\text{cero}} & H_0(D^n, S^{n-1}) & \to & 0 \\ \| & & \| & & & & \\ \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2 & & \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

$$\Longrightarrow H_0(D^n, S^{n-1}) = 0. \qquad \blacksquare$$

Notación: Denotamos por

- $\{D^n\}$ a un generador de $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$.
- $\{S^n\}$ a un generador de $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

$\{D^n\}$ y $\{S^n\}$ se llaman las <u>clases fundamentales</u> de (D^n, S^{n-1}) y S^n, respectivamente (y están determinadas salvo signo).

¿Cómo construir generadores explícitos?

Tma: Para $n \geq 0$,

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n. \end{cases}$$

Dem: Basta dar un homeo. de pares

$$\sigma : (\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\approx} (D^n, S^{n-1}).$$

$\blacksquare$

Obs:

1. En dim. n, $id_n : \Delta_n \to \Delta_n$ es una cadena en $S_n(\Delta_n)$ que es ciclo relativo mód $\partial\Delta_n$.

$\{id_n\}$ es un generador de $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$.

2. Un homeo. $\sigma : \Delta_n \xrightarrow{\approx} D^n$, visto como cadena en $S_n(D^n)$, es un ciclo relativo mód S^{n-1}.

$\{\sigma\}$ es un generador de $H_n(D^n, S^{n-1})$.

3. Consideremos la SEL del par (D^{n+1}, S^n)

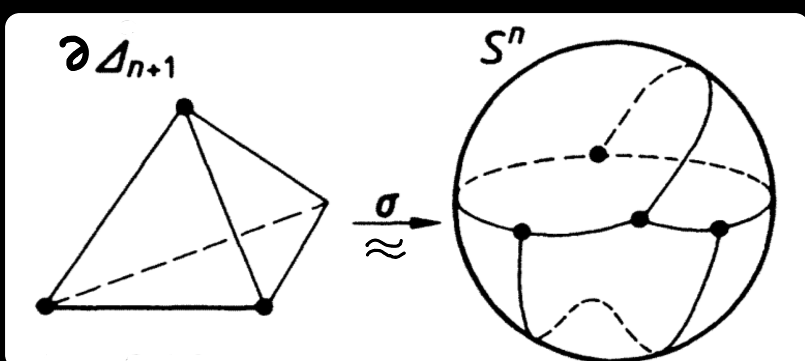
$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{n+1}(D^{n+1})} \longrightarrow H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \underset{\cong}{\xrightarrow{\partial_*}} H_n(S^n) \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_n(D^{n+1})}$$

Entonces $\partial_*(\{D^{n+1}\})$ es una clase fundamental para S^n.

4. Del mismo modo tenemos que

$$\partial_* : H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\cong} H_n(\partial\Delta_{n+1})$$
$$\{id_{n+1}\} \longmapsto \left\{\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \delta_n^i\right\}$$

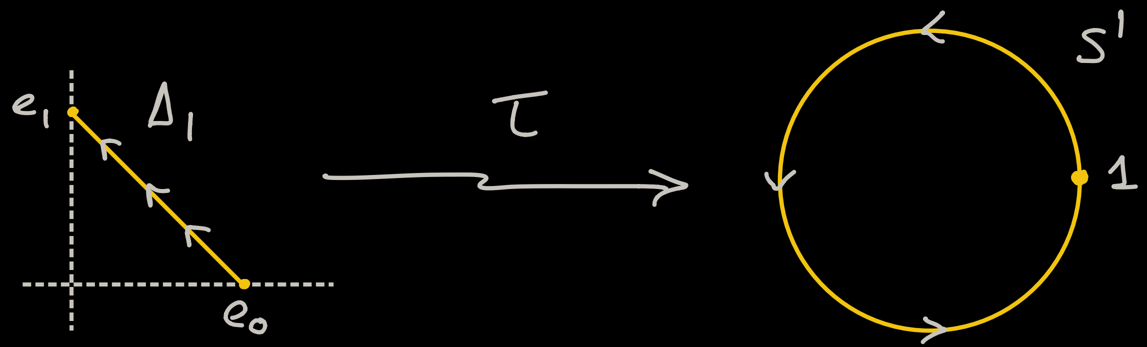
clase fundamental para $\partial\Delta_{n+1} \approx S^n$



5. Para $n=1$, consideremos el 1-ciclo:

$\tau : \Delta_1 \to S^1$ dado por

$$\tau((1-t)e_0 + te_1) = e^{2\pi i t}$$



La clase $\{\tau\} \in H_1(S^1)$ es una clase fundamental para S^1 y se denotará por $\{S^1\}_+$.

Tma: Sea $g_n : S^1 \to S^1$, $g_n(z) = z^n$.

Entonces $(g_n)_*(\{S^1\}_+) = n \cdot \{S^1\}_+$.

Dem: Basta ver que $g_n \circ \tau : \Delta_1 \to S^1$ es homólogo a $n \cdot \tau = \tau + \dots + \tau$ en $S_1(S^1)$.

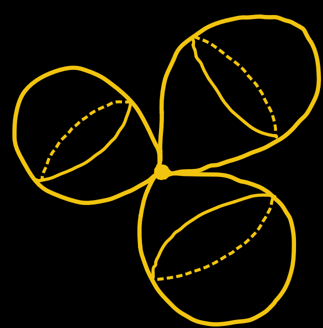
Ver Tma. 9.5.5.

$\blacksquare$

Tma: Sea $\bigvee_j S^n_j$ el wedge de las n-esferas S^n_j idexadas por $j \in J$. Entonces:

$$H_q\left(\bigvee_j S^n_j\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0, n \\ \mathbb{Z}^J & q = n \end{cases}$$

$H_n\left(\bigvee_j S^n_j\right) \cong \bigoplus_j H_n(S^n_j)$ es un gpo. abeliano libre de rango $|J|$.



$S^n_1 \vee S^n_2 \vee S^n_3$

Además:

Si $i_j : S^n \longrightarrow \bigvee_j S^n_j$ es un mapeo que manda a S^n de manera homeomorfa en S^n_j,

$$i_{j*} : H_n(S^n) \longrightarrow H_n\left(\bigvee_j S^n_j\right)$$

entonces los elementos $\{S^n_j\} := i_{j*}(\{S^n\})$ forman una base para $H_n\left(\bigvee_j S^n_j\right)$.