9.6 Homología Celular

Sea X CW-complejo, $X^q = q$-esqueleto de X

= unión de todas las celdas de dim. $\leq q$

Def: Cadenas celulares de X

$$C_q^{cel}(X) := H_q(X^q, X^{q-1}) = H_q\left(X^q / X^{q-1}\right)$$
$$= H_q\left(\bigvee_{n_q} S^q\right)$$
$$\cong \mathbb{Z}^{n_q}$$

$n_q =$ núm. q-celdas de X.

$C_q^{cel}(X) =$ gpo. abeliano libre generado por las q-celdas de X.

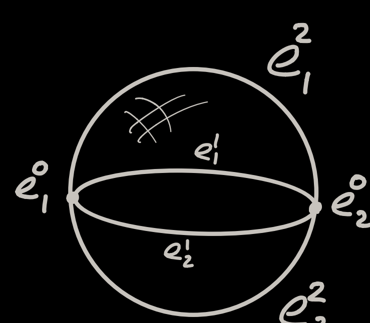
Ejems:

1. $T = e^0 \cup (e^1_\alpha \cup e^1_\beta) \cup e^2$

$C_0(T) = \mathbb{Z}$
$C_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$C_2(T) = \mathbb{Z}$

$C_q(T) = 0, \quad q \geq 3$

2. $S^2 = e^0 \cup (e^1_1 \cup e^1_2) \cup (e^2_1 \cup e^2_2)$



$C_0(S^2) = \mathbb{Z}^2$
$C_1(S^2) = \mathbb{Z}^2$

$C_2(S^2) = \mathbb{Z}^2$
$C_q(S^2) = 0, \quad q \geq 3$

Operador frontera:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \\
C_q(X) = H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[rdd, bend right, "\partial_q^{cel}"'] & H_{q-1}(X^{q-1}) \arrow[r] \arrow[d, "j_*"] & \dots \\
 & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \arrow[d, equal] & \\
 & C_{q-1}(X) &
\end{tikzcd}$$

$\partial_q^{cel} = j_* \circ \partial_*$ homomorfismos en las SEL's de (X^q, X^{q-1}) y (X^{q-1}, X^{q-2}).

Lema: $\partial_q^{cel} \circ \partial_{q+1}^{cel} = 0$

Dem:

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[rrdd, bend right, "\partial_q^{cel} \circ \partial_{q+1}^{cel} = cero"'] & H_q(X^q) \arrow[d, "j_*"] & \\
 & H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q-1}(X^{q-1}) \arrow[d, "j_*"] \\
 & & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})
\end{tikzcd}$$

$\boxtimes$

Def: Complejo de cadenas celulares de X

$$C^{cel}(X): \quad \dots \to C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial^{cel}_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial^{cel}_q} C_{q-1}(X) \to \dots$$

$$H^{cel}_q(X) := H_q(C^{cel}(X)) = \ker \partial^{cel}_q / \operatorname{im} \partial^{cel}_{q+1}$$

(Gpos. de Homología Celular de X)

Tma (Fundamental):

$$H^{cel}_q(X) \cong H_q(X) \quad \forall q \geq 0$$

Homología celular

Homología singular

Estrategia:

$$\begin{tikzcd}
\ker(i_*) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_q(X^q) \arrow[r, "i_*", "\text{epi}"'] \arrow[d, equal] & H_q(X) \\
B^{cel}_q & Z^{cel}_q &
\end{tikzcd}$$

1er. Tma isomorfismo $\quad H^{cel}_q(X) = Z^{cel}_q / B^{cel}_q \cong H_q(X)$

Observaciones básicas:

- SEL del par (X^{q+1}, X^q)

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X^q) \longrightarrow H_q(X^{q+1}) \longrightarrow \underbrace{H_q(X^{q+1}, X^q)}_{=\,0} \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

$\therefore$ $H_q(X^q) \longrightarrow H_q(X^{q+1})$ es sobre

i.e. $H_q(X^{q+1})$ es un cociente de $H_q(X^q)$.

- SEL del par (X^{q+2}, X^{q+1}):

$$\underbrace{H_{q+1}(X^{q+2}, X^{q+1})}_{=\,0} \xrightarrow{\partial_*} H_q(X^{q+1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X^{q+2}) \longrightarrow \underbrace{H_q(X^{q+2}, X^{q+1})}_{=\,0}$$

$\therefore$ $H_q(X^{q+2}) \cong H_q(X^{q+1})$

pegar $(q+2)$-celdas a X^{q+1} no afecta H_q.

Lema:

a) La inclusión $X^q \longrightarrow X$ induce un <u>epimorfismo</u> $H_q(X^q) \longrightarrow H_q(X)$ y

b) La inclusión $X^{q+1} \longrightarrow X$ induce un <u>isomorfismo</u> $H_q(X^{q+1}) \longrightarrow H_q(X)$.

Dem: Consideremos las inclusiones

$$X^q \longrightarrow X^{q+1} \longrightarrow X^{q+2} \longrightarrow \cdots \quad X$$

$$H_q(X^q) \xrightarrow[\text{epi}]{} H_q(X^{q+1}) \xrightarrow[\text{isomorfismo}]{} H_q(X^{q+2}) \xrightarrow[\text{etc.}]{} \cdots \quad H_q(X)$$

- Por compacidad, todo simplejo sing. $\sigma : \Delta_q \to X$ tiene su imagen en algún X^p y lo mismo para toda cadena en $S_q(X)$ (p suficientemente grande).

  Luego, $\forall\, \alpha \in H_q(X)$ $\exists\, p \geq q+1$ tal que

  α está en la imagen de $H_q(X^p) \to H_q(X)$

  $\therefore$ α está en la imagen de $H_q(X^q) \to H_q(X)$.

- Sea $\begin{array}{ccc} H_q(X^{q+1}) & \longrightarrow & H_q(X), \\ \alpha & \longmapsto & 0 \end{array}$ $\alpha = \{z\}$, z q-ciclo en X^{q+1}

  $\therefore$ z q-ciclo en X y $\exists\, w \in S_{q+1}(X)$ tal que $\partial w = z$.

Por compacidad $\exists\, p \geq q+1$ tal que z y w están en X^p

$\therefore$ $z = \partial w$ en X^p

$\therefore$ $\{z\} = 0$ en $H_q(X^p)$ $\Rightarrow$ $\alpha = \{z\} = 0$ en $H_q(X^{q+1})$.

$\blacksquare$

Tma: Si X es CW-complejo que no contiene q-celdas, entonces $H_q(X)=0$.
En particular, si $q > \dim X$ entonces $H_q(X)=0$.

Dem: Usando la SEL de (X^i, X^{i-1}) tenemos

$$H_q(X^{q-1}) \cong H_q(X^{q-2}) \cong \dots \cong H_q(X^0) = 0 \quad (q>0)$$

Como $X^q = X^{q-1}$, $H_q(X^q)=0$. Lema anterior $\Rightarrow$ $H_q(X)=0$.

$\blacksquare$

Tma: Consideremos los homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
H_q(X^q) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "i_*"'] & H_q(X^q, X^{q-1}) = C_q^{cel}(X) \\
H_q(X) &
\end{tikzcd}$$

Entonces:

a) i_* es sobre, (Lema anterior)

b) j_* es inyectivo, (Tma. anterior)

c) $j_*\big(H_q(X^q)\big) = Z_q^{cel}(X)$,

d) $j_*(\ker i_*) = B_q^{cel}(X)$.

Dem:

c).

$$\begin{tikzcd} H_q(X^q) \arrow[r, "j_*"] & H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_q^{cel}"'] & H_{q-1}(X^{q-1}) \arrow[d, "j_* \text{ mono}"] \\ & & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \end{tikzcd}$$

j_* mono implica:

$$\ker(\partial_q^{cel}) = \ker(\partial_*) = \operatorname{im}(j_*).$$

$\therefore$ j_* manda $H_q(X^q)$ de manera isomorfa a $Z_q^{cel}(X)$.

d).

$$\begin{tikzcd} H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_{q+1}^{cel}"'] & H_q(X^q) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j_* \text{ mono}"] & H_q(X^{q+1}) \cong H_q(X) \\ & H_q(X^q, X^{q-1}) & \end{tikzcd}$$

j_* mono implica:

$$\operatorname{im}(\partial_{q+1}^{cel}) = j_*(\operatorname{im} \partial_*) \overset{\cong}{\underset{j_*}{\longleftarrow}} \operatorname{im} \partial_* = \ker i_*.$$

$\therefore$ j_* manda $\ker i_*$ de manera isomorfa sobre $B_q^{cel}(X)$.

∎

Cor: Homología singular $\cong$ Homología celular.

$$H_q(X) \cong H_q(X^q) / \ker(i_*)$$
$$\cong Z_q^{cel}(X) / B_q^{cel}(X)$$
$$= H_q^{cel}(X).$$

Generadores para $C_q^{cel}(X)$:

Sea $e \subseteq X$ una q-celda y $F:(D^q, S^{q-1}) \longrightarrow (X^q, X^{q-1})$ un mapeo característico

$F|_{S^{q-1}}$ = mapeo de pegado de la celda

$$F_* : H_q(D^q, S^{q-1}) \longrightarrow H_q(X^q, X^{q-1}) = C_q^{cel}(X)$$
$$\{D^n\} \longmapsto F_*(\{D^n\})$$

generador

orientación para la celda

Depende de F y de $\{D^n\}$.

Si elegimos una orientación fija $\forall$ q-celda, éstas forman una base para $C_q^{cel}(X)$.

Ejem: $X = \mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$

Complejo de cadenas celulares

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_{2n} \arrow[r, "\partial_{2n}"] \arrow[d, equal] & C_{2n-1} \arrow[r, "\partial_{2n-1}"] \arrow[d, equal] & C_{2n-2} \arrow[r, "\partial_{2n-2}"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "\partial_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, equal] & C_0 \arrow[r, "\partial_0 = 0"] \arrow[d, equal] & 0 \\ & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & & 0 & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad H_q(\mathbb{CP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ejem: Sea K un complejo simplicial. Entonces $|K|$ se puede ver como CW-complejo y

$$H_q(K) \cong H_q(|K|) \quad \forall\, q \geq 0.$$

Homología simplicial

Homología celular de $|K|$.

= Homología singular de $|K|$.

(Ver sección 9.7)