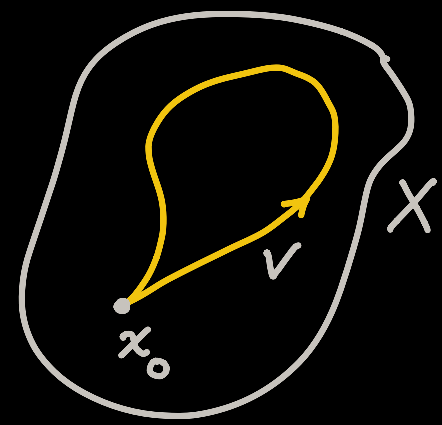
Relación entre $\pi_1(X)$ y $H_1(X)$

Sea $\nu : [0,1] \to X$ lazo basado

- ν es un 1-simplejo sing. en X
- $\partial \nu = 0$ (ν es un ciclo)



Consideremos la función
$$h : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$$
$$[\nu] \longmapsto \{\nu\}$$

Entonces:

- h está bien definida
- h es homomorfismo de grupos
- Natural c/r a mapeos de espacios

Tma: Si X arco-conexo, entonces h es epimorfismo

y $\ker h = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$ subgpo. conmutador

$$\therefore \quad H_1(X) \cong \pi_1(X) \big/ [\pi_1(X), \pi_1(X)] = \pi_1(X)_{ab}$$

Cor: Si X arco-conexo y $\pi_1(X)$ abeliano, entonces $h : \pi_1(X) \xrightarrow{\cong} H_1(X)$ es un <u>isomorfismo</u>.

9.9 El Grado de un Mapeo.

Tma: Sea $g: S^1 \to S^1$ mapeo de grado n (en el sentido del gpo. fundamental). Entonces:

$$g_*: H_1(S^1) \to H_1(S^1)$$

es multiplicación por n.

Dem: $\deg(g) = n \implies g \simeq g_n : S^1 \to S^1$
$$z \mapsto z^n$$

Notemos:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1) \arrow[r, "g_{n*}"] \arrow[d, "h"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \pi_1(S^1) \arrow[d, "h"', "\cong"] \\
H_1(S^1) \arrow[r, "g_{n*}"] & H_1(S^1)
\end{tikzcd}$$

Entonces $g_{n*}: H_1(S^1) \to H_1(S^1)$ es mult. por n.

Def: Sea $f: S^n \to S^n$ función continua $(n \geq 1)$. Entonces, el homomorfismo inducido

$$f_*: H_n(S^n) \to H_n(S^n)$$

es mult. por un entero k, llamado <u>el grado de f</u>.

Tma (Propiedades del grado):

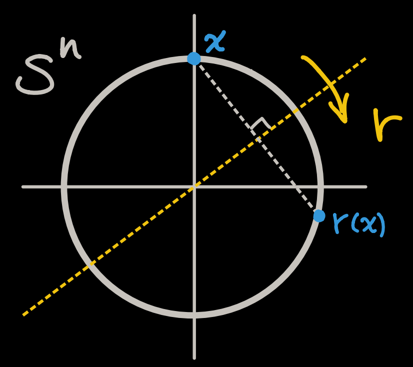
a) Mapeos homotópicos tienen el mismo grado.

b) Si $f,g : S^n \longrightarrow S^n$, entonces $\deg(f \circ g) = (\deg f)(\deg g)$.

c) La identidad $id : S^n \longrightarrow S^n$ tiene grado 1.

d) Si $r : S^n \longrightarrow S^n$ está dado por una reflexión en un hiperplano que pasa por $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$\deg(r) = -1.$$



e) El mapeo antipodal $\begin{array}{rcl} a : S^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$ tiene grado $\deg(a) = (-1)^{n+1}$.

Dem: Debemos probar (d). Basta considerar la reflexión $r : S^n \longrightarrow S^n$ dada por:

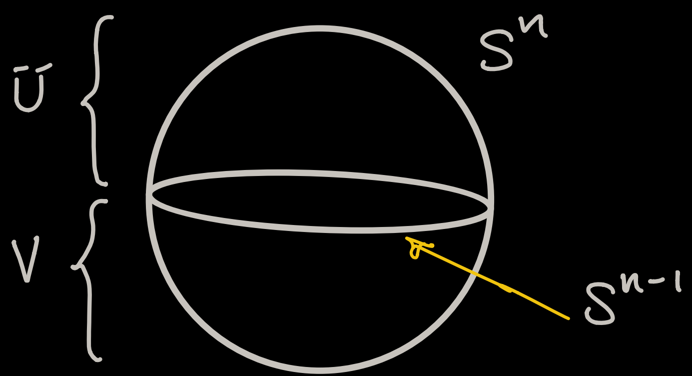
$$r(x_0, \ldots, x_n) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Lema: Sea $r : S^n \to S^n$ la reflexión dada por $r(x_0, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$. Entonces,

$$r_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$$

es multiplicación por -1.

Dem: Mayer-Vietoris e inducción sobre n.



$$U \cup V = S^n$$

$$U \cap V = S^{n-1} \text{ (ecuador)}$$

Notemos que $\bar{r} = r\big|_{S^{n-1}}$ también es reflexión en la coordenada x_0.

Sucesión de M.V. para (S^n, U, V):

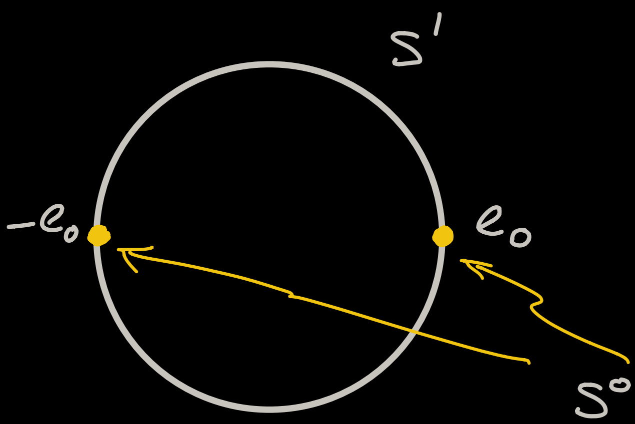
$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[r, "\Delta", "\cong"'] \arrow[d, "r_*"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "//"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{r}_*"', "\cong"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[r, "\Delta", "\cong"'] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$(n \geq 2)$

Luego (para $n \geq 2$), si $\bar{r}_*$ es mult. por -1 entonces r_* también es mult. por -1.

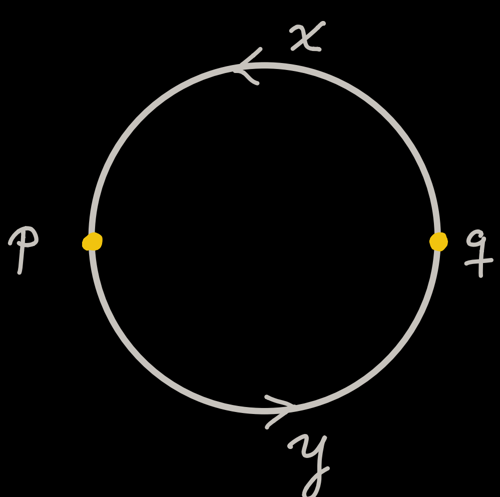
$n = 1$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_1(S^1) \arrow[r, "\Delta", "\text{mono}"'] \arrow[d, "r_*"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "//"] & H_0(S^0) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{r}_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_1(S^1) \arrow[r, "\Delta", "\text{mono}"'] & H_0(S^0) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$



$H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ gen. por $\{S^1\}_+$

$H_0(S^0) = \mathbb{Z}^2$ gen. por p, q



$\{S^1\}_+ \sim x + y$ homólogos

$$\Delta\{S^1\}_+ = \partial x = p - q$$

$$\bar{r}_*(p-q) = q - p$$

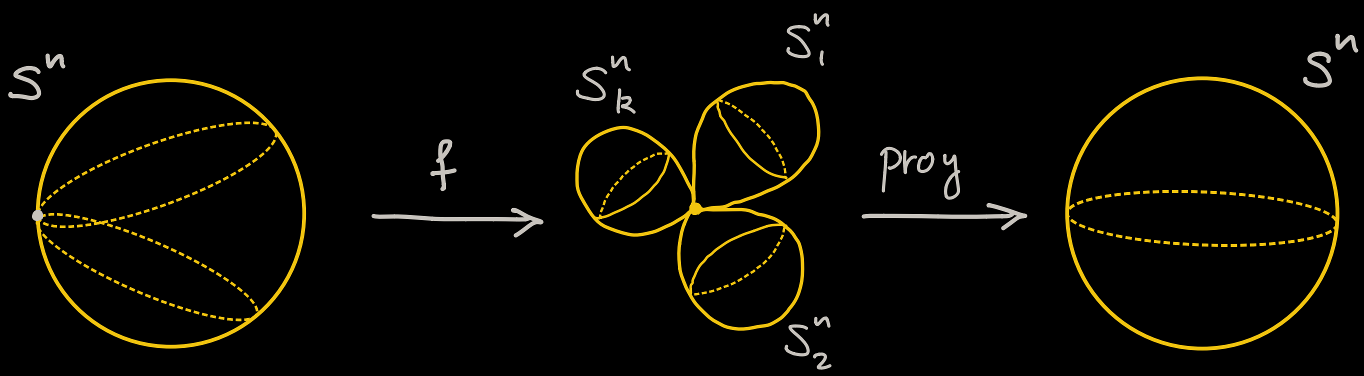
$\therefore\ r_* : H_1(S^1) \to H_1(S^1)$ es mult. por -1. ∎

Ejems:

1. $g_n : S^1 \longrightarrow S^1$, $g_n(z) = z^n$

$$\Longrightarrow \deg(g_n) = n.$$

2. Para todo $n \geq 1$ $\exists$ $S^n \longrightarrow S^n$ de grado k:



$\exists$ $f : S^n \longrightarrow \bigvee_k S^n$ tal que

$$f_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n\left(\bigvee_k S^n\right) \cong \bigoplus_k \mathbb{Z}$$

$$\{S^n\} \longmapsto \{S^n_1\} + \dots + \{S^n_k\}$$

eltos. base canónica

$$\therefore \quad (\text{proy} \circ f)_*(\{S^n\}) = k \cdot \{S^n\}$$

Ejem: Sea $X = S^n \cup_f e^{n+1}$, $f: S^n \to S^n$

$$= e^0 \cup e^n \cup e^{n+1}$$

Cadenas celulares:

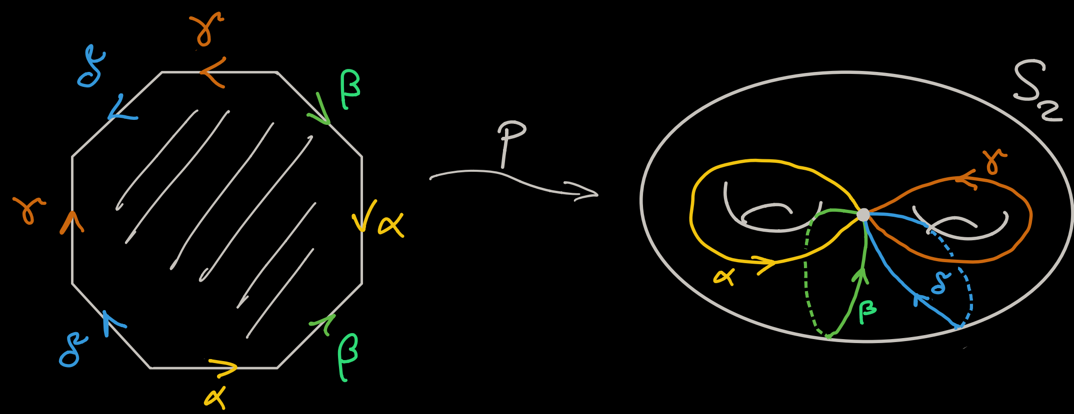
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\text{mult. por } \deg(f)"] \arrow[d, equal] & C_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \ \cdots \ 0 \arrow[r] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Si $d = \deg(f)$, $d \neq 0$:

$$H_q(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}_d & q = n \\ 0 & q = n+1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ejem: Superficie orientable, género g

$g = 2$



En general: $S_g = e^0 \cup \bigcup_{i=1}^{g} (e^1_{\alpha_i} \cup e^1_{\beta_i}) \cup e^2$

$$S_g = \left(\bigvee_{2g} S^1\right) \cup_f e^2 , \qquad f : S^1 \longrightarrow \bigvee_{2g} S^1$$

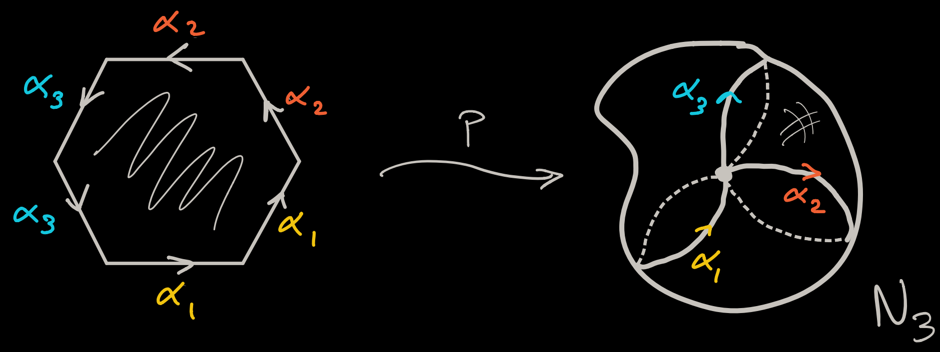
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1 = 0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \mathbb{Z} & & \bigoplus_{2g} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

$$\partial(e^2) = (e^1_1 + e^1_2 - e^1_1 - e^1_2) + \ldots + (e^1_{2g-1} + e^1_{2g} - e^1_{2g-1} - e^1_{2g})$$
$$= 0$$

$$\therefore \qquad H_q(S_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & q = 1 \\ \mathbb{Z} & q = 2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ejem: superficie no orientable, género g.

$g = 3$



En general: $N_g = e^0 \cup (e^1_{\alpha_1} \cup \dots \cup e^1_{\alpha_g}) \cup e^2$

$$N_g = \left(\bigvee_g S^1\right) \cup_f e^2 , \qquad f : S^1 \longrightarrow \bigvee_g S^1$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1 = 0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \\
 & & \mathbb{Z} & & \bigoplus_g \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

$$\partial(e^2) = 2e^1_1 + \dots + 2e^1_g = 2(e^1_1 + \dots + e^1_g)$$

$$\therefore \quad H_q(N_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2 & q = 1 \\ 0 & q \geq 2 . \end{cases}$$