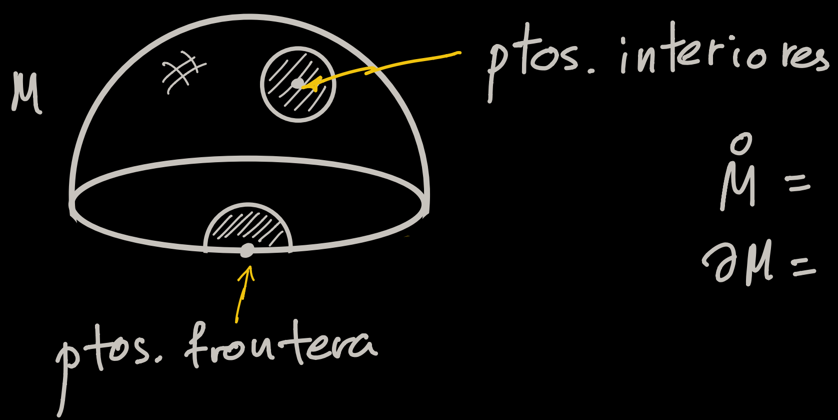
1.5 Variedades

Def: Un espacio M es una variedad de dim n si:

- Todo pto. de M tiene una Vec. homeomorfa a D^n.
- M es Hausdorff
- M tiene una base numerable para su topología.

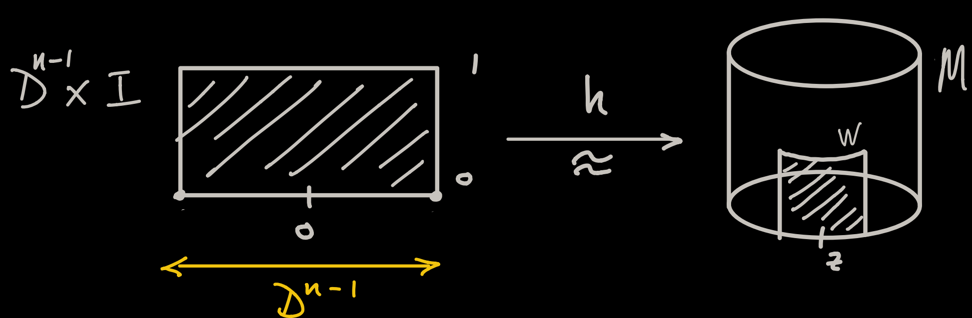


$\mathring{M}$ = ptos. interiores
∂M = ptos. frontera

Propiedades

- Todo homeo. $f: M \xrightarrow{\approx} N$ mapea ∂M en ∂N.

- Para todo pto. frontera $z \in M$ $\exists$ vec. $z \in W \subseteq M$ y un homeo. $h: D^{n-1} \times I \to W$ tal que:



$h(0,0) = z$

$h(D^{n-1} \times 0) = W \cap \partial M$

- Si $\partial M \neq \emptyset$, ∂M es una $(n-1)$-variedad sin frontera.

- Si M es una m-variedad y N es una n-variedad entonces $M \times N$ es una $(m+n)$-variedad y

$$\partial(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N).$$

Ejems:

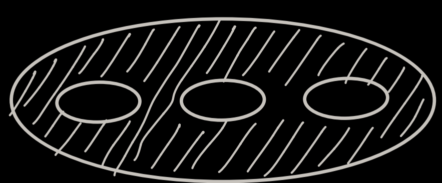
1. Como $D^0 = \{0\}$, toda 0-variedad es un espacio discreto, con un # finito ó numerable de ptos.

2. Toda 1-variedad conexa es homeomorfa a:

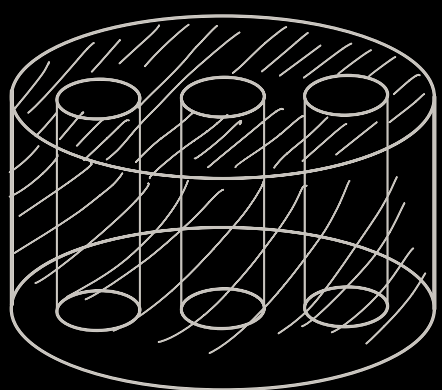
$\mathbb{R}$	S^1	I	$[0,+\infty)$
no compacta sin frontera	compacta sin frontera	compacta c/frontera	no compacta c/frontera

3. Las 2-variedades son superficies.

4. Sea D_g^2 = disco cerrado menos g discos abiertos



D_g^2

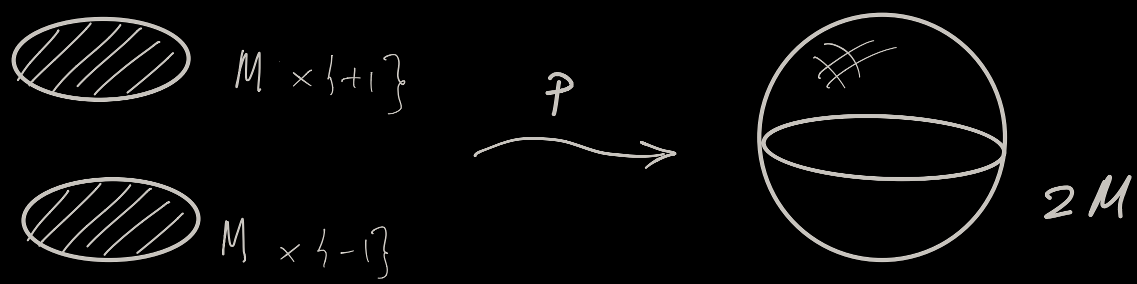


$D_g^2 \times I$

3-variedad c/frontera

5. M_1, M_2 n-var. $\Longrightarrow$ $M_1 \# M_2$ suma conexa.

6. Si M n-variedad, $\partial M \neq \emptyset$, definimos "el doble" de M:



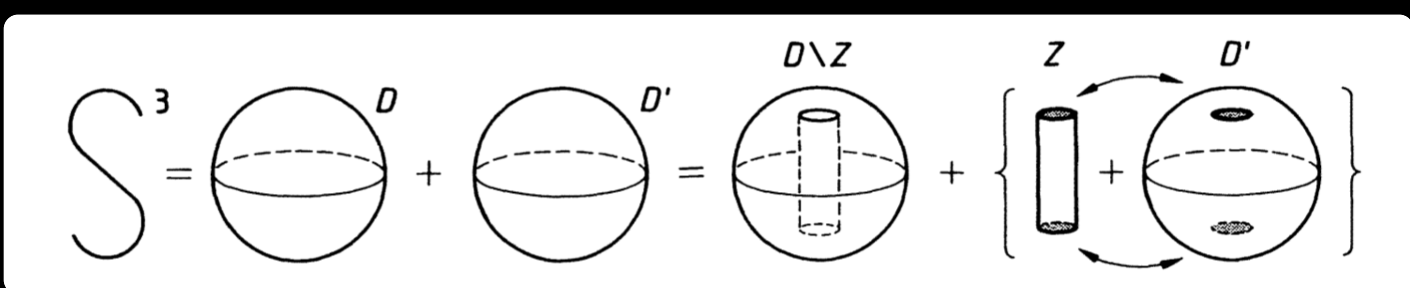
7. La esfera S^3 es una 3-variedad sin frontera.

$$S^3 = \partial D^4 \approx \partial(D^2 \times D^2)$$
$$= (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$$

toros sólidos

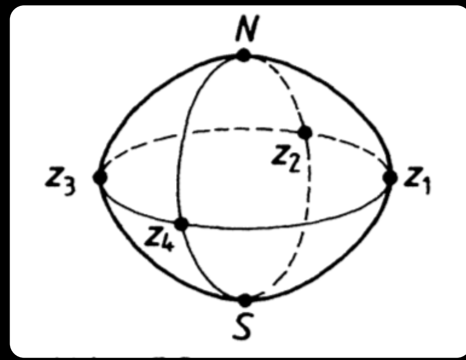
& $(D^2 \times S^1) \cap (S^1 \times D^2) = S^1 \times S^1$ toro (superficie)

$\therefore$ S^3 es la unión de dos toros sólidos que se intersectan en su frontera común.



Ejem: El espacio lente $L(p,q)$

Bola cerrada $D^3 \subseteq \mathbb{R}^3$



Sean $z_1, \dots, z_p$ $p \geq 2$ ptos. en S^1 que dividen el ecuador en p arcos de la misma longitud.

Para todo i, identificamos el $\Delta(z_i, z_{i+1}, N)$ con el $\Delta(z_{i+q}, z_{i+q+1}, S)$, donde q primo rel. con p, $1 \leq q < p$. (índices mod p)

Definimos el espacio lente

$$L(p,q) := D^3 /_{\sim}$$

$L(p,q)$ es una 3-variedad cerrada (compacta, $\partial = \emptyset$).

Ejem: Espacio proyectivo (real) de dim. n

$\mathbb{R}P^n$ = conjunto de rectas en $\mathbb{R}^{n+1}$, pasan por 0.

$$= \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0\right) \Big/ \begin{array}{l} x \sim \lambda x \\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \end{array}$$

Elementos: $\langle x \rangle = \langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle$

coord. homogeneas

Tma: $\mathbb{RP}^n$ es una n-variedad cerrada, conexa.

Dem: $\forall i = 1, \dots, n+1$ definimos

$$U_i = \{ \langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0 \}$$

- U_i abierto en $\mathbb{RP}^n$
- $\mathbb{RP}^n = U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$
- $$\begin{aligned} h_i : \mathbb{R}^n &\xrightarrow{\approx} U_i \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \langle y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots y_n \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i^{-1} : U_i &\xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n \\ \langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \end{aligned}$$

$\therefore$ $\mathbb{RP}^n$ es una n-variedad.

Además: $\mathbb{RP}^n \approx S^n / x \sim \pm x \ \forall x$

$\therefore$ $\mathbb{RP}^n$ compacto.

$\mathbb{RP}^1 \approx S^1$

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{proy}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \arrow[d, "\text{proy canónica}"] \\ S^n / x \sim \pm x \ \forall x \arrow[r, dashed, "\approx"] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

¿inversa? $\blacksquare$

Ejem: Espacio proy. complejo, dim. n

$$\mathbb{C}P^n = \text{conjunto de subespacios dim. } 1 \text{ en } \mathbb{C}^{n+1}.$$

$$= \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0\right) \Big/ \begin{smallmatrix} \vec{z} \sim \lambda \vec{z} \\ \lambda \in \mathbb{C}^* \end{smallmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & & (z_1, \dots, z_{n+1}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^n & & \langle z_1, \dots, z_{n+1} \rangle \end{array}$$

coordenadas homogéneas

No todas cero.

Tma: $\mathbb{C}P^n$ es una $2n$-variedad cerrada, conexa

Dem: $\forall i = 1, \dots, n+1$

$$U_i = \{ \langle z_1, \dots, z_{n+1} \rangle \in \mathbb{C}P^n \mid z_i \neq 0 \} \approx \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}.$$

$$\mathbb{C}P^n = U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$$

$\therefore$ $\mathbb{C}P^n$ es una $2n$-variedad

$$S^{2n+1} = \{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1 \}$$

esfera unitaria dim. $2n+1$

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{2n+1}/\sim & \overset{\approx}{\dashrightarrow} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

$\therefore \quad \mathbb{C}P^n \approx S^{2n+1} / \vec{z} \sim \lambda \vec{z}$

$\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = 1$

Caso $n=1$: $S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$

$$\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\
\mathbb{C}P^1 = S^3/\sim \arrow[ur, dashed, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

$\eta(z_1, z_2) = \dfrac{z_1}{z_2}$

η = mapeo de Hopf

$\therefore \quad \mathbb{C}P^1 \approx S^2$

Ejem: $\mathbb{H}P^n$ = espacio proy. cuaterniónico de dim. n

= $4n$- variedad cerrada, conexa.

(Ver archivos adicionales) $\quad n=1, \ \mathbb{H}P^1 \approx S^4$.

$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4 = \mathcal{L}(1, i, j, k)$ base canónica

$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$

$ij = -ji = k$

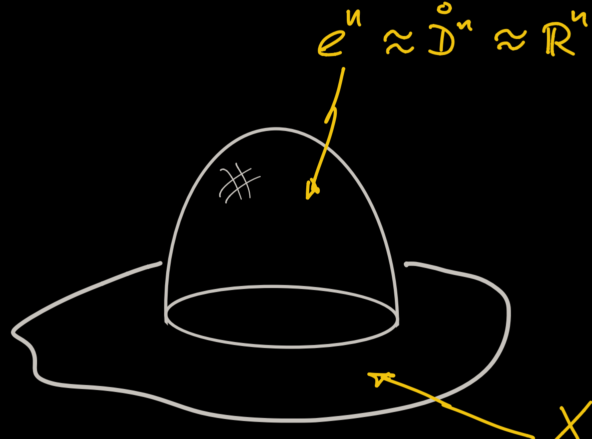
$jk = -kj = i$

$ki = -ik = j$

1.6 Adjunción de Celdas

Sea $f : S^{n-1} \to X$ mapeo

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & D^n \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\text{inclusión}"] & X \cup_f D^n \end{tikzcd}$$



espacio de adjunción

Def: $\quad X \cup_f D^n := X \amalg D^n \Big/ {\scriptstyle f(x) \sim x \ \forall x \in S^{n-1}}$

- $X \cup_f D^n$ se obtiene a partir de X pegando una celda de dim. n
- $X \cup_f D^n$ se denota $X \cup e^n$ (abuso de notación).
- X es un subespacio cerrado de $X \cup e^n$.

Ejems:

a). Sup. $X = \{pto.\}$

$f : S^{n-1} \to \{pto.\}$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{cte.}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & D^n \arrow[d] \\ * \arrow[r] & * \cup_f D^n = D^n / S^{n-1} \approx S^n \end{tikzcd}$$

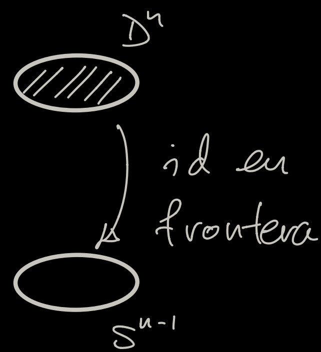
b). Sup. $f : S^{n-1} \to X$ es constante (X arbitrario).

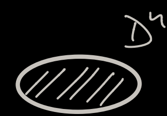
$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"', "\text{cte}"] & D^n \arrow[d] \\ x_0 \in X \arrow[r] & X \cup_f D^n \end{tikzcd} = X \vee \left(D^n / S^{n-1}\right) = X \vee S^n$$

f mapeo cte. $\Rightarrow$ $X \cup e^n = X \vee S^n$.

c). $f = id : S^{n-1} \to S^{n-1}$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "id"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & D^n \arrow[d] \\ S^{n-1} \arrow[r] & S^{n-1} \cup_{id} D^n \end{tikzcd}$$

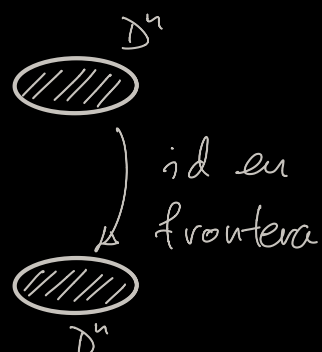


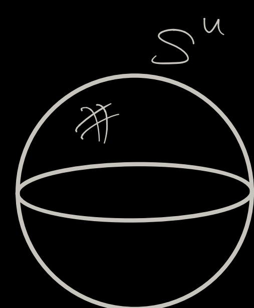


$$S^{n-1} \cup_{id} D^n = D^n$$

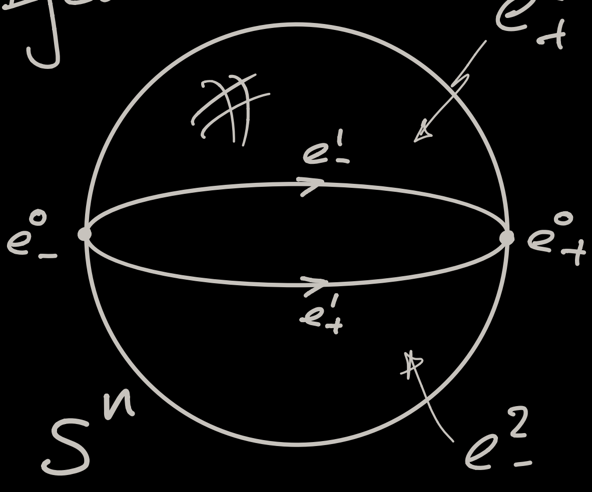
d). $f : S^{n-1} \to D^n$ inclusión

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "f"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & D^n \arrow[d] \\ D^n \arrow[r] & D^n \cup_f D^n \end{tikzcd}$$





Ejem:



$S^0 = e^0_+ \cup e^0_-$

$S^1 = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-)$

$S^2 = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-) \cup (e^2_+ \cup e^2_-)$

En general: $S^n = (e^0_+ \cup e^0_-) \cup (e^1_+ \cup e^1_-) \cup \dots \cup (e^n_+ \cup e^n_-)$

dos celdas antipodales en c/dim. $i = 0, 1, \dots, n$.

Recordemos que: $\mathbb{R}P^n = S^n \Big/ \begin{smallmatrix} x \sim \pm x \\ \forall x \end{smallmatrix}$

$\therefore \quad \mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$ una celda en c/dim

$\mathbb{R}P^0 = e^0$

$\mathbb{R}P^1 = e^0 \cup e^1 \approx S^1$

$\mathbb{R}P^2 = e^0 \cup e^1 \cup e^2 = S^1 \underset{f}{\cup} e^2$, $\deg(f) = 2$

$\mathbb{R}P^{n+1} = \mathbb{R}P^n \underset{p_n}{\cup} e^{n+1}$ donde $p_n : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$

proy. canónica.

Ejem: Espacio proy. complejo $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}\setminus 0 \big/ \sim$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1}\setminus 0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{proy}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \mathbb{C}^{n+2}\setminus 0 \arrow[d, "\text{proy}"] \\
\mathbb{C}P^n \arrow[r] & \mathbb{C}P^{n+1}
\end{tikzcd}$$

$\langle z_1, \dots, z_{n+1}\rangle \qquad \langle z_1, \dots, z_{n+1}, 0\rangle$

- $\mathbb{C}P^n$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{C}P^{n+1}$

$$\mathbb{C}P^{n+1}\setminus \mathbb{C}P^n = \{\langle z_1, \dots, z_{n+2}\rangle \mid z_{n+2}\neq 0\}$$
$$\approx \mathbb{C}^{n+1}$$
$$\cong \mathbb{R}^{2n+2} \approx \mathring{D}^{2n+2}$$

$$\langle z_1, \dots, z_{n+2}\rangle \mapsto \left(\frac{z_1}{z_{n+2}}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_{n+2}}\right)$$

se elimina $\frac{z_{n+2}}{z_{n+2}} = 1$

$$\therefore\ \mathbb{C}P^{n+1} = \mathbb{C}P^n \cup_{f_n} e^{2n+2}$$

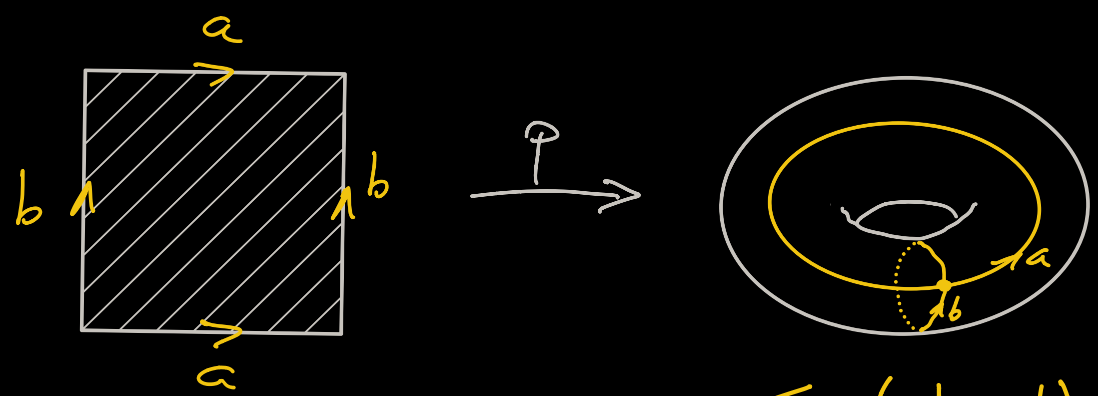
donde $f_n : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ proy. canónica

$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}\big/\sim$

$$\mathbb{C}P^0 = e^0$$
$$\mathbb{C}P^1 = e^0 \cup e^2 = S^2$$
$$\mathbb{C}P^2 = e^0 \cup e^2 \cup e^4$$

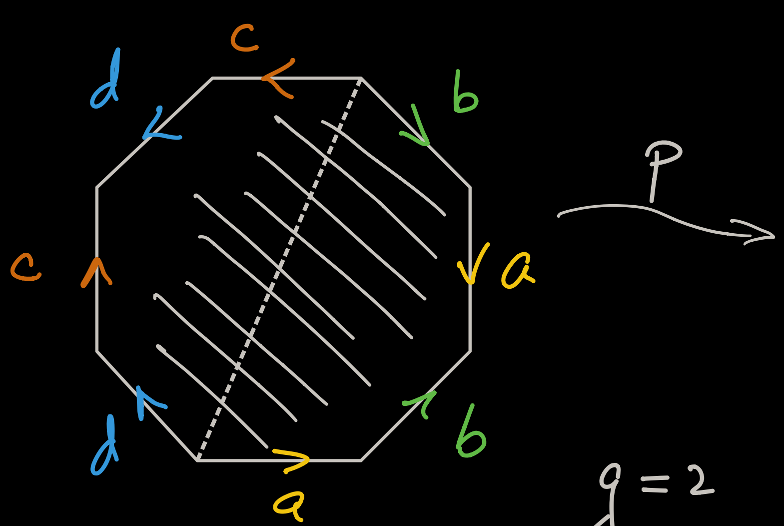
En general: $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$.

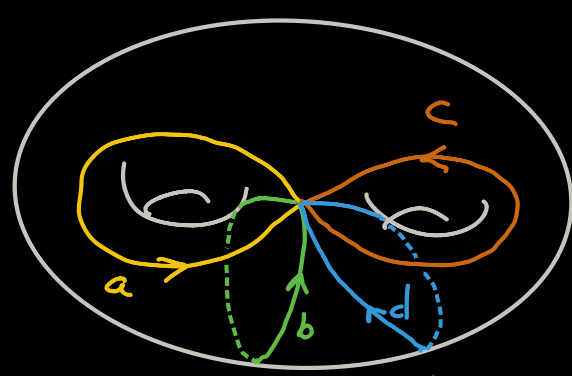
Ejem: El toro de dim. 2



$$T = (S^1 \vee S^1) \cup_f e^2$$

Ejem: Superficie orientable, género g.





$g = 2$

$$S_2 = \left(\bigvee_4 S^1\right) \cup_f e^2$$

En general:
$$S_g = \left(\bigvee_{2g} S^1\right) \cup_f e^2$$

Ejem: Superficie no orientable, género g.

$$N_g = \#_{i=1}^{g} \mathbb{RP}^2 = \left(\bigvee_g S^1\right) \cup_f e^2.$$